

XXV. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny
Budapest, 2016. március 11–15.

Megoldások
11. osztály

1. feladat Egy háromszög három oldalának mérőszáma, a, b, c ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Bizonyítsa be, hogy $a^2 + c^2 < 3ac$.

Minda Mihály (Vác)

1. megoldás: A háromszög-egyenlőtlenség szerint $a + b > c$ és $b + c > a$, így $b > c - a$ és $b > a - c$, ami azt jelenti, hogy $|a - c| < b$. (2 pont)

Mivel a, b és c egy pozitív tagú mértani sorozat három egymást követő tagja, ezért $b = \sqrt{ac}$. (2 pont)

Így most $|a - c| < \sqrt{ac}$. (2 pont)

Innen négyzetre emelés (mindkét oldal nemnegatív), majd átrendezés után a kívánt $a^2 + c^2 < 3ac$ egyenlőtlenség adódik. (3 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: Mivel a háromszög-egyenlőtlenséget szokás úgy is kimondani, hogy a háromszög bármely oldala nagyobb, mint a másik két oldal különbsége, ezért a $b > c - a$ és $b > a - c$ összefüggések erre való hivatkozással is elfogadhatók.

Ha a mértani sorozat hányadosa q , akkor $b = aq$, $c = aq^2$ és a megoldás könnyen átfogalmazható ezekkel a jelölésekkel, a megfelelő pontszámok ekkor is járnak.

2. megoldás: Ha β jelöli az a és c oldalak által bezárt szöveget, akkor a koszinusztétel alapján $a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = b^2$. (2 pont)

Mivel a, b és c egy pozitív tagú mértani sorozat három egymást követő tagja, ezért $b = \sqrt{ac}$. (2 pont)

Így most $a^2 + c^2 = ac(1 + 2 \cos \beta)$. (3 pont)

Mivel $\cos \beta < 1$, ezért $a^2 + c^2 < 3ac$. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. feladat Egy interneten lebonyolított bajnokságon minden résztvevő minden másik résztvevővel pontosan kétszer játszott. Egy mérkőzésen a győztes 2, a vesztes 0 pontot kapott, döntetlen esetén mindkét játékosnak 1-1 pont járt. Az eredménylista összeállítói meglepve tapasztalták, hogy az utolsó helyezett kivételével minden versenyző pontszáma úgy adódik, hogy a közvetlenül mögötte végző pontszámához mindig ugyanazt a páros számot hozzáadjuk. A győztes 2016 pontot szerzett. Hányan vettek részt a versenyen?

Tóth Sándor (Kisvárd)

Megoldás: Legyen a résztvevők száma n , ekkor összesen $n(n-1)$ mérkőzést játszottak, és így az összpontszám $2n(n-1)$. (1 pont)

Ha az utolsó helyezett b pontot ért el, és minden versenyző d ponttal többet kapott, mint a mögötte végző, akkor az összpontszám ennek a számtani sorozatnak az összege: $\frac{(2b + (n-1)d)n}{2}$. (1 pont)

Az összpontszám kétféle felírását összevetve és rendezve $2b = (n-1)(4-d)$ adódik. (1 pont)

Innen $4-d \geq 0$ és d párossága miatt csak $d = 2$ és 4 lehetséges. (1 pont)

A győztes pontszáma $2016 = b + (n-1)d$, ahonnan $b = 2016 - (n-1)d$. (1 pont)

Ezt a $2b = (n-1)(4-d)$ összefüggésbe beírva és rendezve $4032 = (n-1)(d+4)$ adódik. (1 pont)

Ide $d = 2$ -t, illetve 4 -et behelyettesítve azt kapjuk, hogy a résztvevők száma $n = 673$ vagy $n = 505$. (1 pont)

Ezek valóban megoldások, mert mindkét létszám esetén megvalósulhat a pontszámok között megadott összefüggés:

Ha $d = 4$, $n = 505$, akkor megfelel, ha mindenki mindkétszer legyőzi a nála kisebb rajtszámúakat, ekkor a pontszámok: $0, 4, 8, \dots, 2012, 2016$. (1 pont)

Ha $d = 2$, $n = 673$, akkor megfelel, ha mindenki egyszer megveri a nála kisebb rajtszámúakat, a második mérkőzés pedig mindenhol döntetlen.

Ekkor a pontszámok: $672, 674, \dots, 2014, 2016$. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

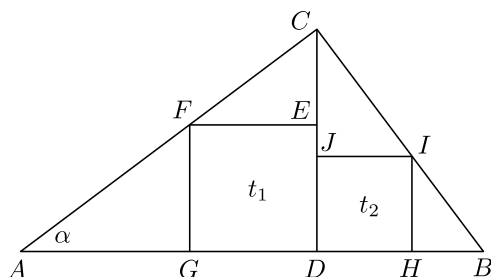
Megjegyzés: Ha d páratlan is lehet, akkor még $d = 1$ és $d = 3$ jön szóba. Az elsőre n nem lesz egész szám, a másodikból $n = 577$. Erre is teljesíthetők a pontszámokra előírt kikötések: Mivel $2b = n - 1$, így $2b + 1 (= 577)$ versenyző van, akiknek rendre $b, b + 3, b + 6, \dots, 7b (= 2016)$ pontot kell elérniük. Az első mérkőzésen mindenki győzze le a nála kisebb rajtszámúakat, ekkor a kapott pontszámok: $0, 2, 4, \dots, 4b$. Ezért a második mérkőzés során rendre az alábbi pontszámokat kell megszerezniük: $b, b + 1, b + 2, \dots, 3b$. Ez teljesül, ha az azonos paritású rajtszámúak döntetlenre játszanak, a különböző paritásúak mérkőzésén pedig a nagyobb rajtszámú győz.

3. feladat Az ABC derékszögű háromszögben az A csúcsnál levő szög α . Az AB átfogóhoz tartozó magasság az átfogót a D pontban metszi. Az ADC háromszögbe olyan $DEFG$ négyzetet rajzolunk, amelynek E, F és G csúcsai rendre DC -re, CA -ra és AD -re illeszkednek, a CDB háromszögbe pedig olyan $DHIJ$ négyzetet, amelynek H, I és J csúcsai DB -re, BC -re és CD -re esnek. Jelölje t_1 és t_2 a $DEFG$, illetve a $DHIJ$ négyzet területét. Bizonyítsa be, hogy

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{t_1}{t_1 + t_2}}.$$

Bíró Bálint (Eger)

1. megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



A CDB és az ADC részháromszögek hasonlók, és a hasonlóság aránya

$$\frac{CB}{AC} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (2 \text{ pont})$$

Ennél a hasonlóságnál a szóban forgó két négyzet is egymásnak van megfeleltetve, (1 pont)

ezért területeik aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő:

$$\frac{t_2}{t_1} = \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (2 \text{ pont})$$

Innen a t_2/t_1 arányra a

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$$

képletet kapjuk, (2 pont)

amelyből átrendezéssel a feladat állítása közvetlenül következik. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Mivel $t_1 = DF^2/2$ és $t_2 = DI^2/2$, (1 pont)
ezért

$$\sqrt{\frac{t_2}{t_1 + t_2}} = \sqrt{\frac{DF^2}{DF^2 + DI^2}}. \quad (2 \text{ pont})$$

Az FDI háromszög D -nél derékszögű, így $DF^2 + DI^2 = FI^2$. (1 pont)

A DI/DF arány egyenlő a CDB és ADC háromszögek hasonlósági arányával, azaz a CB/CA aránnyal. Ezért az FDI háromszög hasonló az ACB háromszöghöz. (2 pont)

Emiatt $\angle CFI = \alpha$, és így $\cos \alpha = DF/FI$. (1 pont)

Ezekből tehát valóban

$$\sqrt{\frac{t_2}{t_1 + t_2}} = \sqrt{\frac{DF^2}{FI^2}} = \frac{DF}{FI} = \cos \alpha. \quad (2 \text{ pont})$$

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

4. feladat Az a_n sorozatban $a_1 = 1$ és $a_n = n(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1})$, ha $n \geq 2$. Határozza meg a_{2016} értékét.

*Nagy Piroska Mária (Dunakeszi)
Szoldatics József (Budapest)*

1. megoldás: Legyen $n \geq 3$. Alkalmazzuk $(n-1)$ -re és n -re a rekurziós összefüggést:

$$a_{n-1} = (n-1)(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}), \quad \text{így} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{n-1} \quad (2 \text{ pont})$$

$$a_n = n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1}) = n \left(\frac{a_{n-1}}{n-1} + a_{n-1} \right) = \frac{n^2}{n-1} \cdot a_{n-1}. \quad (2 \text{ pont})$$

Ezt az átalakítást tovább használva teleszkopikus szorzatot kapunk:

$$a_n = \frac{n^2}{n-1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n-2} \cdot \frac{(n-2)^2}{n-3} \cdot \dots \cdot \frac{3^2}{2} \cdot a_2. \quad (3 \text{ pont})$$

Az egyszerűsítéseket elvégezve, felhasználva az $a_2 = 2$ értéket a_n -et zárt alakban tudjuk kifejezni:

$$a_n = \frac{n \cdot n!}{2}.$$

Tehát $a_{2016} = 1008 \cdot 2016!$.

(2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Használjuk az $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ jelölést. Számoljunk ki néhány kezdőértéket:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 2, & a_3 &= 9, & a_4 &= 48, \dots \\ S_1 &= 1, & S_2 &= 3 = \frac{3!}{2}, & S_3 &= 12 = \frac{4!}{2}, \dots \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Az a sejtésünk, hogy $S_n = \frac{(n+1)!}{2}$. Ezt teljes indukcióval fogjuk belátni. (2 pont)

Az összefüggés $n = 1$ -re igaz. Feltételezzük, hogy $n = k$ -ra is teljesül:

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = \frac{(k+1)!}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Bizonyítjuk az állítást $n = k+1$ -re.

A sorozat képzési szabálya és az indukciós feltétel alapján:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} = \frac{(k+1)!}{2} + (k+1)(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = \\ &= \frac{(k+1)!}{2} + (k+1) \cdot S_k = \frac{(k+1)!}{2} \cdot (1 + k + 1) = \frac{(k+2)!}{2}. \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

Ezzel sejtésünket beláttuk.

Felhasználva a most bizonyított összefüggést:

$$a_n = n \cdot S_{n-1} = \frac{n \cdot n!}{2}.$$

Tehát $a_{2016} = 1008 \cdot 2016!$.

(2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

5. feladat Jelölje p_n az n -edik prímszámot ($p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$). Bizonyítsa be, hogy minden n pozitív egész szám esetén

$$\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_2 p_3} + \dots + \frac{1}{p_n p_{n+1}} < \frac{1}{3}.$$

Bencze Mihály (Bukarest)

Megoldás: Ha S_n jelöli a feladatban szereplő összeget, akkor $S_1 = 1/6 < 1/3$, különben pedig

$$2S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{p_2 p_3} + \dots + \frac{2}{p_n p_{n+1}}, \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $p_{k+1} - p_k \geq 2$, ezért

(1 pont)

$$\frac{2}{p_2 p_3} + \dots + \frac{2}{p_n p_{n+1}} \leq \frac{p_3 - p_2}{p_2 p_3} + \dots + \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n p_{n+1}}, \quad (3 \text{ pont})$$

ahol a jobb oldalt teleszkopikus összegként írhatjuk fel:

$$\frac{p_3 - p_2}{p_2 p_3} + \dots + \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n p_{n+1}} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_3} - \frac{1}{p_4} + \dots + \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_{n+1}}. \quad (3 \text{ pont})$$

Ebből következően

$$2S_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{p_2} = \frac{2}{3},$$

ahonnan a bizonyítandó $S_n < 1/3$ egyenlőtlenséget nyerjük.

(1 pont)

(+1 pont)

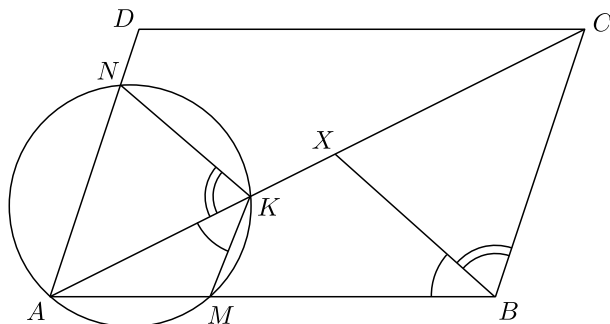
Összesen: 10 pont

6. feladat Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsán áthaladó kör az AB , AD oldalakat és az AC átlót rendre az M , N , illetve K pontokban metszi. Bizonyítsa be, hogy

$$AB \cdot AM + AD \cdot AN = AC \cdot AK.$$

Róka Sándor (Nyíregyháza)

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



A paralelogramma B -nél levő szöge is és az $AMKN$ húrnégyszög K -nál levő szöge is 180° -ra egészíti ki az A -nál levő szöget, (1 pont)

ezért $\angle ABC = \angle MKA + \angle AKN$. Felvehetünk tehát az AC átlón egy olyan X pontot, hogy a BX szakasz az ABC szöget az $\angle ABX = \angle MKA$ és $\angle XBC = \angle AKN$ részekre bontsa fel. (3 pont)

Az AMK háromszög és az AXB háromszög hasonló, mert az A -nál levő szögük közös, és a K -nál, illetve B -nél levő szögük a konstrukció folytán egyenlő.

Emiatt

$$\frac{AM}{AK} = \frac{AX}{AB}, \quad \text{azaz} \quad AB \cdot AM = AK \cdot AX. \quad (2 \text{ pont})$$

Az ANK háromszög és a CXB háromszög hasonló, mert az A -nál, illetve C -nél levő szögük két váltószög lévén egyenlő, valamint a K -nál, illetve B -nél levő szögük a konstrukció folytán egyenlő.

Ezért

$$\frac{AN}{AK} = \frac{CX}{CB}, \quad \text{azaz} \quad (CB = AD \text{ miatt}) \quad AD \cdot AN = AK \cdot CX. \quad (2 \text{ pont})$$

A két egyenlőséget összeadva a kívánt $AB \cdot AM + AD \cdot AN = AK \cdot (AX + CX) = AK \cdot AC$ formula adódik. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont