XXV. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny
Budapest, 2016. március 11–15.

Megoldások
10. osztály

1. feladat Egy diák megírt már néhány dolgozatot, és az utolsó megírása előtt számolgat: Ha az utolsót 97 pontosra írom, akkor az átlagom 90 pont lesz, ha csak 73 pontra sikerül, akkor 87 pont lesz az átlagom. Hány dolgozatot írt eddig a diák, és mennyi volt az átlagpontszáma?

Katz Sándor (Bonyhád)

1. megoldás: Ha a diák eddig x dolgozatot írt, és az átlaga y pont, akkor xy pontja van. (1 pont)

Ha az utolsó dolgozatot 97 pontra írja, akkor az átlaga

$$\frac{xy+97}{x+1}=90,$$

ha 73 pontra, akkor

$$\frac{xy+73}{x+1}=87. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az egyenleteket rendezve:

$$\begin{aligned} xy+97&=90x+90\\ xy+73&=87x+87. \end{aligned} \qquad \text{(1 pont)}$$

A két egyenletet kivonjuk egymásból:

$$\begin{aligned} 24&=3x+3\\ x&=7. \end{aligned} \qquad \text{(2 pont)}$$

Így $xy=90x-7=623$, $y=623/7=89$. Tehát a diák eddig 7 dolgozatot írt és az átlaga 89 pont volt. (2 pont)

Ellenőrzés: A dolgozatok átlaga $(623+97)/8=90$ és $(623+73)/8=87$ lehet az utolsó dolgozat megírása után, tehát a megoldás megfelel a feltételeknek. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Ha az utolsó dolgozaton 97 pont helyett 73 pontot szerez a diák, akkor az összpontszáma 24-gyel lesz kevesebb. (3 pont)

Az átlag így 90-ről 87-re csökken, azaz 3 ponttal lesz kisebb. Ez csak úgy lehetséges, ha az átlagot 8 dolgozatra számoljuk. (3 pont)

Tehát eddig 7 dolgozatot írt a diák. (1 pont)

Az utolsó dolgozat írása előtt $90\cdot 8-97=623$ volt az összpontszáma, az átlaga pedig $623/7=89$ pont. (1 pont)

Ellenőrzés: Ha a 623 ponthoz a 8. dolgozattal 73 pontot szerez a diák, akkor valóban $(623+73)/8 = 87$ pont lesz az átlaga. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. feladat Hányféleképpen lehet sorrendbe állítani a RENDETLENÜL szó betűit úgy, hogy ne álljon két E betű egymás mellett? (Minden betűt pontosan egyszer használunk fel.)

Bálint Béla (Zsolna)

1. megoldás: Először rendezzük el az E-től különböző betűket, nyolc betűt, köztük két-két azonosat: R D T Ü N N L L. (2 pont)

A 8 betűt 8! féle módon rendezhetjük sorba, de a két N betűt és a két L betűt egymás között felcserélve nem kapunk új esetet (ismétléses permutáció), ezért $\frac{8!}{2\cdot 2}$ lehetőségünk van ezeknek a betűknek a sorba rendezéséhez. (3 pont)

Az E betűket az így kialakult „szó” elé, utána vagy a betűk közé, tehát 9 helyre tehetjük le. 9 helyből kell kiválasztanunk 3-at úgy, hogy a sorrend nem számít. Ez $\binom{9}{3}$ lehetőség.

(3 pont)

Ezért $\frac{8!}{4}\cdot\binom{9}{3} = 10\ 080\cdot 84 = 846\ 720$ esetet kapunk. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A végeredményt elfogadjuk $\frac{8!}{4}\cdot\binom{9}{3}$ alakban, a maximális pontszámot a tanuló akkor is megkapja, ha nem számolja ki ennek az értékét.

2. megoldás: A RENDETLENÜL szó 11 betűből áll, ezek között van három E betű, két N betű és két L betű. A 11 betűt 11! féle módon rendezhetjük sorba, a három E betűt, a két N betűt és a két L betűt egymás között felcserélve nem kapunk új esetet (ismétléses permutáció), ezért $\frac{11!}{3!\cdot 2\cdot 2}$ lehetőségünk van ezeknek a betűknek a sorba rendezéséhez.

(2 pont)

Ezek között azok az esetek, amelyekben egymás mellett szerepelnek E betűk, számunkra rosszak, amelyeket le fogunk vonni. Ha két E betű szerepel egymás mellett, akkor tekintsük ezeket egy karakternek, a harmadik E betűt pedig egy szimpla jelnek. (2 pont)

Most 10 karaktert rendezünk sorba, köztük kettő-kettő azonos. Ilyen eset $\frac{10!}{2\cdot 2}$ van.

(1 pont)

Ha három E betű szomszédos, akkor előbb az ilyen eseteket kétszer számoltuk, tehát ezek számát majd vissza kell adnunk. (1 pont)

Legyen most EEE egyetlen jel, ilyen eset $\dfrac{9!}{2\cdot 2}$ van. (2 pont)

A feladat feltételeinek megfelelő sorbarendezések száma $\dfrac{11!}{3!\cdot 2\cdot 2}-\dfrac{10!}{2\cdot 2}+\dfrac{9!}{2\cdot 2}=846\,720.$ (1 pont)

(+1 pont)

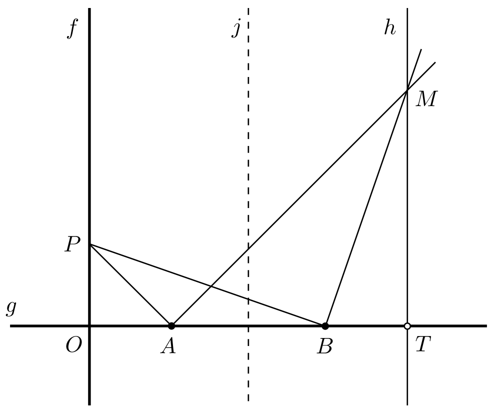
Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A végeredményt elfogadjuk $\dfrac{11!}{3!\cdot 2\cdot 2}-\dfrac{10!}{2\cdot 2}+\dfrac{9!}{2\cdot 2}$ alakban, a maximális pontszámot a tanuló akkor is megkapja, ha nem számolja ki ennek az értékét.

3. feladat Adott a síkban két egymásra merőleges egyenes, f és g, valamint a g egyenesen két pont, A és B, amelyek egymástól is és a két egyenes metszéspontjától is különböznek. Az f egyenes egy tetszőleges P pontját az adott pontokkal összekötő egyenesekre merőlegeseket állítunk az A és B pontokban. Határozza meg a merőlegesek metszéspontjainak a halmazát, ha P végigfut az f egyenesen.

Kántor Sándorné (Debrecen)

1. megoldás: Jelöljük O-val f és g metszéspontját. A feladat szerinti M metszéspont minden olyan esetben előáll, amikor $P\neq O$, hiszen ilyenkor PA és PB nem párhuzamos, és így a rájuk állított merőlegesek sem azok. (1 pont)



Legyen T az M pont merőleges vetülete a g egyenesen. Ekkor az ATM, BTM, PAM, PBM, POA és POB derékszögű háromszögekre a Pitagorasz-tételt fölírva

$$\begin{aligned} AT^2-BT^2 &= (AM^2-TM^2)-(BM^2-TM^2)=AM^2-BM^2=\\ &=(PM^2-PA^2)-(PM^2-PB^2)=PB^2-PA^2=\\ &=(PO^2+OB^2)-(PO^2+OA^2)=OB^2-OA^2 \end{aligned}$$

adódik, ami nem függ P választásától. (2 pont)

Azt állítjuk, hogy a T talppontot az AT^2-BT^2 mennyiség egyértelműen meghatározza. Valóban, ha a g egyenes mentén az O, A, B és T pontot rendre a 0, a, b és x koordináta adja meg, akkor

$$b^2-a^2=OB^2-OA^2=AT^2-BT^2=(x-a)^2-(x-b)^2=2(b-a)x+a^2-b^2,$$

ahonnan $a \neq b$ miatt x egyértelműen kifejezhető:

$$x = \frac{2b^2 - 2a^2}{2(b-a)} = a + b. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az összes M metszéspont ezért a g egyenesre ugyanabban a T pontban állított h merőleges egyenesre illeszkedik. (1 pont)

Ez a T pont az $x = a + b$ összefüggés miatt az O pontnak az AB szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe. (1 pont)

A h egyenesen tetszőlegesen kiszemelt $M \neq T$ pontból kiindulva a feladat konstrukcióját P és M szerepcseréjével végrehajtva visszakapjuk P-t. Ezért magát a T pontot kivéve a h egyenes minden pontja hozzátartozik a keresett halmazhoz. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Használjuk az 1. megoldás jelöléseit. Ha $P \neq O$, akkor az M pont előáll, (1 pont)

valamint az A, B pontok a PM átmérőjű körre illeszkednek, hiszen a PM szakasz A-ból is és B-ből is derékszög alatt látszik. (2 pont)

Az AB szakasz ennek a körnek húrja, tehát az azt merőlegesen felező j egyenes áthalad a kör középpontján, vagyis PM felezőpontján. (2 pont)

Ezért M rajta van az f egyenes j-re vonatkozó tükörképén, a h egyenesen. (1 pont)

Az M pont biztosan különbözik g és h metszéspontjától, azaz a T ponttól, hiszen a g egyenesnek a körrel csak két közös pontja (A és B) lehet. (1 pont)

Megfordítva, ha a h egyenesen kiszemelt M pont különbözik T-től, akkor tekintsük az A, B és M (nem kollineáris) pontokon áthaladó kört, és annak az M-mel átellenes P pontját. Ez a P egyrészt illeszkedik f-re, másrészt P-ből kiindulva a feladat konstrukciójával M-et származtatja. Ezért a T pont kivételével h minden pontja előáll M-ként. (2 pont)

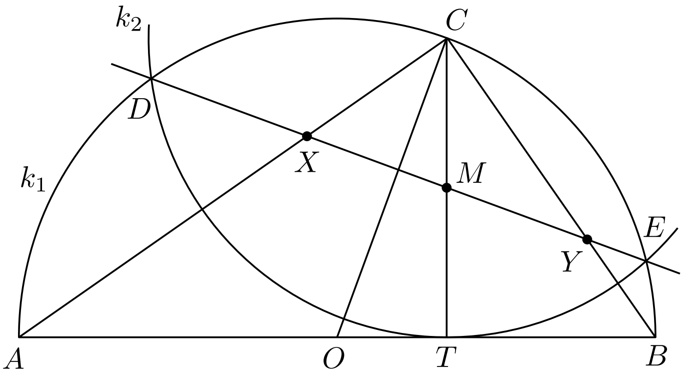
(+1 pont)

Összesen: 10 pont

4. feladat Legyen az AB átmérőjű k_1 kör egy A-tól és B-től különböző pontja C. Bocsássunk merőlegest a C pontból AB-re, a merőleges talppontja T. A C középpontú, CT sugarú k_2 kör a k_1 kört a D és E pontokban metszi. A DE és CT szakaszok metszéspontja M, a CA és DE, valamint a CB és DE szakaszok metszéspontjai rendre X és Y. Bizonyítsa be, hogy $MX = MY$.

Bíró Bálint (Eger)

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AB szakasz O felezőpontja a k_1 kör középpontja. A CO szakasz a két kör középpontját köti össze, ezért merőleges a közös DE húrra. (2 pont)

Thalész tétele miatt az ABC háromszög C-nél derékszögű. (1 pont)

Az XYC szög és az OCA szög merőleges szárú hegyesszögek, ezért $XYC\sphericalangle = OCA\sphericalangle$. Ugyanígy $YXC\sphericalangle = OCB\sphericalangle$. (1 pont)

A CAO háromszög egyenlő szárú, ezért $OCA\sphericalangle = CAO\sphericalangle$. Ugyanígy $OCB\sphericalangle = OBC\sphericalangle$. (1 pont)

A CAB szög és a BCT szög merőleges szárú hegyesszögek, ezért $CAB\sphericalangle = BCT\sphericalangle$. Ugyanígy $ABC\sphericalangle = TCA\sphericalangle$. (1 pont)

Az egyenlőségeket összevetve $MYC\sphericalangle = MCY\sphericalangle$ és $MXC\sphericalangle = MCX\sphericalangle$ következik, (1 pont)

ami azt jelenti, hogy a CXM és a CYM háromszögek egyenlő szárúak. A szárak egyenlősége folytán $MX = MC = MY$. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

5. feladat Bizonyítsa be, hogy $n+1$ darab különböző, $2n$-nél kisebb pozitív egész szám közül kiválasztható három különböző úgy, hogy ezek közül kettő összege megegyezzen a harmadikkal.

Bencze Mihály (Bukarest)

Megoldás: Legyen az adott $n+1$ szám: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$. Képezzük az $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ számokat, amelyek különbözőek, pozitívak és kisebbek, mint $2n$. (3 pont)

Tekintsük a következő $2n$ darab, $2n$-nél kisebb pozitív egész számot:

$$a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1. \qquad (2 \text{ pont})$$

A skatulyaelv szerint ezek közül kettő megegyezik. (1 pont)

A feltételekből következik, hogy az egyik szám az $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ számok közül való, a másik pedig az $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ számok közül. (1 pont)

Legyenek ezek a_k és $a_m - a_1$. Ekkor $a_k = a_m - a_1$, azaz teljesül, hogy

$$a_k + a_1 = a_m. \qquad (2 \text{ pont})$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

6. feladat Képezzük az $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ halmaz minden nemüres részhalmazát. Az egy részhalmazban lévő számokat szorozzuk össze és vegyük a szorzat reciprokát, majd ezeket adjuk össze. (Ha a halmaz egyelemű, akkor egytényezős szorzatnak tekintjük és ennek vesszük a reciprokát.) Mekkora az így kapott összeg?

Kántor Sándor (Debrecen)

1. megoldás: Jelöljük A_n-nel az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz esetében az így elkészített összeget.

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} = 2,$$

$$A_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3. \qquad \text{(2 pont)}$$

Az a sejtésünk, hogy minden $n > 0$ természetes szám esetén $A_n = n$, így $A_{2016} = 2016$. Teljes indukcióval bizonyítjuk állításunkat. (1 pont)

A sejtés $n = 1$-re igaz. Feltételezzük, hogy $n = k$-ra is teljesül:

$$A_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = k. \qquad \text{(1 pont)}$$

Bizonyítjuk az állítást $n = k + 1$-re:

$$A_{k+1} = A_k + \frac{1}{k+1} + A_k \cdot \frac{1}{k+1}. \qquad \text{(3 pont)}$$

Felhasználjuk az indukciós feltételt:

$$A_{k+1} = k + \frac{1}{k+1} + k \cdot \frac{1}{k+1} = k + \frac{k+1}{k+1} = k + 1. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ezzel sejtésünket beláttuk. Tehát a keresett összeg valóban 2016.

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Jelöljük A_n-nel az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz esetében az így elkészített összeget. Ez az összeg egy többtényezős szorzat zárójelfelbontás utáni alakjára emlékeztet.

(2 pont)

Valóban, ha az alábbi szorzatban minden tagot minden taggal szorozva felbontjuk a zárójeleket, akkor az A_n-nél 1-gyel nagyobb számot kapunk:

$$A_n + 1 = (1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right). \qquad \text{(3 pont)}$$

A zárójeleken belül közös nevezőre hozva:

$$A_n + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} = n + 1,$$

tehát $A_n = n$. (3 pont)

A feladat kérdésére A_{2016} a válasz, amelynek az értéke a fentiek alapján 2016. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont