

XXV. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny
Budapest, 2016. március 11–15.

Megoldások
10. osztály

1. feladat Egy diák megírt már néhány dolgozatot, és az utolsó megírása előtt számolt: Ha az utolsót 97 pontosra írom, akkor az átlagom 90 pont lesz, ha csak 73 pontra sikerül, akkor 87 pont lesz az átlagom. Hány dolgozatot írt eddig a diák, és mennyi volt az átlagpontszáma?

Katz Sándor (Bonyhád)

1. megoldás: Ha a diák eddig x dolgozatot írt, és az átlaga y pont, akkor xy pontja van. (1 pont)

Ha az utolsó dolgozatot 97 pontra írja, akkor az átlaga

$$\frac{xy + 97}{x + 1} = 90,$$

ha 73 pontra, akkor

$$\frac{xy + 73}{x + 1} = 87. \quad (2 \text{ pont})$$

Az egyenleteket rendezve:

$$\begin{aligned} xy + 97 &= 90x + 90 \\ xy + 73 &= 87x + 87. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

A két egyenletet kivonjuk egymásból:

$$\begin{aligned} 24 &= 3x + 3 \\ x &= 7. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Így $xy = 90x - 7 = 623$, $y = 623/7 = 89$. Tehát a diák eddig 7 dolgozatot írt és az átlaga 89 pont volt. (2 pont)

Ellenőrzés: A dolgozatok átlaga $(623 + 97)/8 = 90$ és $(623 + 73)/8 = 87$ lehet az utolsó dolgozat megírása után, tehát a megoldás megfelel a feltételeknek. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Ha az utolsó dolgozatot 97 pont helyett 73 pontot szerez a diák, akkor az összpontszáma 24-gyel lesz kevesebb. (3 pont)

Az átlag így 90-ről 87-re csökken, azaz 3 ponttal lesz kisebb. Ez csak úgy lehetséges, ha az átlagot 8 dolgozatra számoljuk. (3 pont)

Tehát eddig 7 dolgozatot írt a diák. (1 pont)

Az utolsó dolgozat írása előtt $90 \cdot 8 - 97 = 623$ volt az összpontszáma, az átlaga pedig $623/7 = 89$ pont. (1 pont)

Ellenőrzés: Ha a 623 ponthoz a 8. dolgozattal 73 pontot szerez a diák, akkor valóban $(623 + 73)/8 = 87$ pont lesz az átlaga.

(1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. feladat Hányféleképpen lehet sorrendbe állítani a RENDETLENÜL szó betűit úgy, hogy ne álljon két E betű egymás mellett? (Minden betűt pontosan egyszer használunk fel.)

Bálint Béla (Zsolna)

1. megoldás: Először rendezzük el az E-től különböző betűket, nyolc betűt, köztük két-két azonosat: R D T Ü N N L L. (2 pont)

A 8 betűt $8!$ féle módon rendezhetjük sorba, de a két N betűt és a két L betűt egymás között felcserélve nem kapunk új esetet (ismétléses permutáció), ezért $\frac{8!}{2 \cdot 2}$ lehetőségünk van ezeknek a betűknek a sorba rendezéséhez. (3 pont)

Az E betűket az így kialakult „szó” elé, utána vagy a betűk közé, tehát 9 helyre tehetjük le. 9 helyből kell kiválasztanunk 3-at úgy, hogy a sorrend nem számít. Ez $\binom{9}{3}$ lehetőség. (3 pont)

Ezért $\frac{8!}{4} \cdot \binom{9}{3} = 10\,080 \cdot 84 = 846\,720$ esetet kapunk. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A végeredményt elfogadjuk $\frac{8!}{4} \cdot \binom{9}{3}$ alakban, a maximális pontszámot a tanuló akkor is megkapja, ha nem számolja ki ennek az értékét.

2. megoldás: A RENDETLENÜL szó 11 betűből áll, ezek között van három E betű, két N betű és két L betű. A 11 betűt $11!$ féle módon rendezhetjük sorba, a három E betűt, a két N betűt és a két L betűt egymás között felcserélve nem kapunk új esetet (ismétléses permutáció), ezért $\frac{11!}{3! \cdot 2 \cdot 2}$ lehetőségünk van ezeknek a betűknek a sorba rendezéséhez. (2 pont)

Ezek között azok az esetek, amelyekben egymás mellett szerepelnek E betűk, számunkra rosszak, amelyeket le fogunk vonni. Ha két E betű szerepel egymás mellett, akkor tekintsük ezeket egy karakternek, a harmadik E betűt pedig egy szimpla jelnek. (2 pont)

Most 10 karaktert rendezünk sorba, köztük kettő-kettő azonos. Ilyen eset $\frac{10!}{2 \cdot 2}$ van. (1 pont)

Ha három E betű szomszédos, akkor előbb az ilyen eseteket kétszer számoltuk, tehát ezek számát majd vissza kell adnunk. (1 pont)

Legyen most EEE egyetlen jel, ilyen eset $\frac{9!}{2 \cdot 2}$ van. (2 pont)

A feladat feltételeinek megfelelő sorbarendezések száma $\frac{11!}{3! \cdot 2 \cdot 2} - \frac{10!}{2 \cdot 2} + \frac{9!}{2 \cdot 2} = 846\,720$.
(1 pont)
(+1 pont)

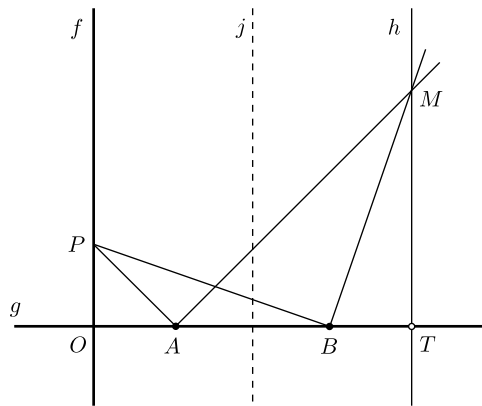
Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A végeredményt elfogadjuk $\frac{11!}{3! \cdot 2 \cdot 2} - \frac{10!}{2 \cdot 2} + \frac{9!}{2 \cdot 2}$ alakban, a maximális pontszámot a tanuló akkor is megkapja, ha nem számolja ki ennek az értékét.

3. feladat Adott a síkban két egymásra merőleges egyenes, f és g , valamint a g egyenesen két pont, A és B , amelyek egymástól is és a két egyenes metszéspontjától is különböznek. Az f egyenes egy tetszőleges P pontját az adott pontokkal összekötő egyenesekre merőlegeseket állítunk az A és B pontokban. Határozza meg a merőlegesek metszéspontjainak a halmazát, ha P végigfut az f egyenesen.

Kántor Sándorné (Debrecen)

1. megoldás: Jelöljük O -val f és g metszéspontját. A feladat szerinti M metszéspont minden olyan esetben előáll, amikor $P \neq O$, hiszen ilyenkor PA és PB nem párhuzamos, és így a rájuk állított merőlegesek sem azok. (1 pont)



Legyen T az M pont merőleges vetülete a g egyenesen. Ekkor az ATM , BTM , PAM , PBM , POA és POB derékszögű háromszögekre a Pitagorasz-tételt fölírva

$$\begin{aligned} AT^2 - BT^2 &= (AM^2 - TM^2) - (BM^2 - TM^2) = AM^2 - BM^2 = \\ &= (PM^2 - PA^2) - (PM^2 - PB^2) = PB^2 - PA^2 = \\ &= (PO^2 + OB^2) - (PO^2 + OA^2) = OB^2 - OA^2 \end{aligned}$$

adódik, ami nem függ P választásától. (2 pont)

Azt állítjuk, hogy a T talppontot az $AT^2 - BT^2$ mennyiség egyértelműen meghatározza. Valóban, ha a g egyenes mentén az O , A , B és T pontot rendre a 0 , a , b és x koordináta adja meg, akkor

$$b^2 - a^2 = OB^2 - OA^2 = AT^2 - BT^2 = (x - a)^2 - (x - b)^2 = 2(b - a)x + a^2 - b^2,$$

ahonnan $a \neq b$ miatt x egyértelműen kifejezhető:

$$x = \frac{2b^2 - 2a^2}{2(b - a)} = a + b. \quad (2 \text{ pont})$$

Az összes M metszéspont ezért a g egyenesre ugyanabban a T pontban állított h merőleges egyenesre illeszkedik. (1 pont)

Ez a T pont az $x = a + b$ összefüggés miatt az O pontnak az AB szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe. (1 pont)

A h egyenesen tetszőlegesen kiszemelt $M \neq T$ pontból kiindulva a feladat konstrukcióját P és M szerepcseréjével végrehajtva visszakapjuk P -t. Ezért magát a T pontot kivéve a h egyenes minden pontja hozzátartozik a keresett halmazhoz. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Használjuk az 1. megoldás jelöléseit. Ha $P \neq O$, akkor az M pont előáll, (1 pont)

valamint az A, B pontok a PM átmérőjű körre illeszkednek, hiszen a PM szakasz A -ból is és B -ből is derékszög alatt látszik. (2 pont)

Az AB szakasz ennek a körnek húrja, tehát az azt merőlegesen felező j egyenes áthalad a kör középpontján, vagyis PM felezőpontján. (2 pont)

Ezért M rajta van az f egyenes j -re vonatkozó tükörképén, a h egyenesen. (1 pont)

Az M pont biztosan különbözik g és h metszéspontjától, azaz a T ponttól, hiszen a g egyenesnek a körrel csak két közös pontja (A és B) lehet. (1 pont)

Megfordítva, ha a h egyenesen kiszemelt M pont különbözik T -től, akkor tekintsük az A, B és M (nem kollineáris) pontokon áthaladó kört, és annak az M -mel átellenes P pontját. Ez a P egyrészt illeszkedik f -re, másrészt P -ből kiindulva a feladat konstrukciójával M -et származtatja. Ezért a T pont kivételével h minden pontja előáll M -ként. (2 pont)

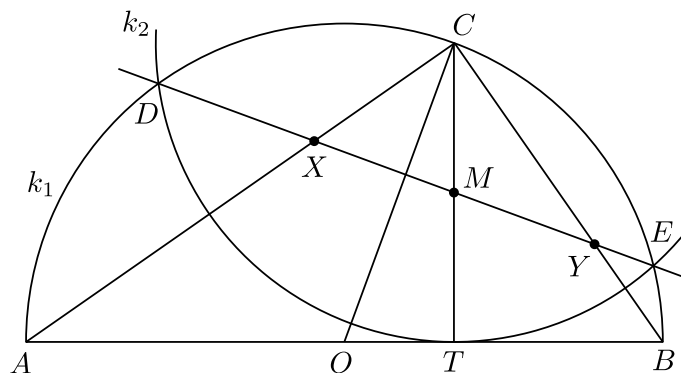
(+1 pont)

Összesen: 10 pont

4. feladat Legyen az AB átmérőjű k_1 kör egy A -tól és B -től különböző pontja C . Bocsássunk merőlegest a C pontból AB -re, a merőleges talppontja T . A C középpontú, CT sugarú k_2 kör a k_1 kört a D és E pontokban metszi. A DE és CT szakaszok metszéspontja M , a CA és DE , valamint a CB és DE szakaszok metszéspontjai rendre X és Y . Bizonyítsa be, hogy $MX = MY$.

Bíró Bálint (Eger)

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AB szakasz O felezőpontja a k_1 kör középpontja. A CO szakasz a két kör középpontját köti össze, ezért merőleges a közös DE húrra. (2 pont)

Thalész tétele miatt az ABC háromszög C -nél derékszögű. (1 pont)

Az XYC szög és az OCA szög merőleges szárú hegyesszögek, ezért $XYC \sphericalangle = OCA \sphericalangle$. Ugyanígy $YXC \sphericalangle = OCB \sphericalangle$. (1 pont)

A CAO háromszög egyenlő szárú, ezért $OCA \sphericalangle = CAO \sphericalangle$. Ugyanígy $OCB \sphericalangle = OBC \sphericalangle$. (1 pont)

A CAB szög és a BCT szög merőleges szárú hegyesszögek, ezért $CAB \sphericalangle = BCT \sphericalangle$. Ugyanígy $ABC \sphericalangle = TCA \sphericalangle$. (1 pont)

Az egyenlőségeket összevetve $MYC \sphericalangle = MCY \sphericalangle$ és $MXC \sphericalangle = MCX \sphericalangle$ következik, (1 pont)

ami azt jelenti, hogy a CXM és a CYM háromszögek egyenlő szárúak. A szárak egyenlősége folytán $MX = MC = MY$. (2 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

5. feladat Bizonyítsa be, hogy $n + 1$ darab különböző, $2n$ -nél kisebb pozitív egész szám közül kiválasztható három különböző úgy, hogy ezek közül kettő összege megegyezzen a harmadikkal.

Bencze Mihály (Bukarest)

Megoldás: Legyen az adott $n + 1$ szám: $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$. Képezzük az $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{n+1} - a_1$ számokat, amelyek különbözőek, pozitívak és kisebbek, mint $2n$.

(3 pont)

Tekintsük a következő $2n$ darab, $2n$ -nél kisebb pozitív egész számot:

$$a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{n+1} - a_1. \quad (2 \text{ pont})$$

A skatulyaelv szerint ezek közül kettő megegyezik. (1 pont)

A feltételekből következik, hogy az egyik szám az a_2, a_3, \dots, a_{n+1} számok közül való, a másik pedig az $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{n+1} - a_1$ számok közül. (1 pont)

Legyenek ezek a_k és $a_m - a_1$. Ekkor $a_k = a_m - a_1$, azaz teljesül, hogy

$$a_k + a_1 = a_m. \quad (2 \text{ pont})$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

6. feladat Képezzük az $\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ halmaz minden nemüres részhalmazát. Az egy részhalmazban lévő számokat szorozzuk össze és vegyük a szorzat reciprokát, majd ezeket adjuk össze. (Ha a halmaz egyelemű, akkor egytényezős szorzatnak tekintjük és ennek vesszük a reciprokát.) Mekkora az így kapott összeg?

Kántor Sándor (Debrecen)

1. megoldás: Jelöljük A_n -nel az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz esetében az így elkészített összeget.

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, & A_2 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} = 2, \\ A_3 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

Az a sejtésünk, hogy minden $n > 0$ természetes szám esetén $A_n = n$, így $A_{2016} = 2016$. Teljes indukcióval bizonyítjuk állításunkat. (1 pont)

A sejtés $n = 1$ -re igaz. Feltételezzük, hogy $n = k$ -ra is teljesül:

$$A_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = k. \quad (1 \text{ pont})$$

Bizonyítjuk az állítást $n = k + 1$ -re:

$$A_{k+1} = A_k + \frac{1}{k+1} + A_k \cdot \frac{1}{k+1}. \quad (3 \text{ pont})$$

Felhasználjuk az indukciós feltételt:

$$A_{k+1} = k + \frac{1}{k+1} + k \cdot \frac{1}{k+1} = k + \frac{k+1}{k+1} = k+1. \quad (2 \text{ pont})$$

Ezzel sejtésünket beláttuk. Tehát a keresett összeg valóban 2016.

(+1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Jelöljük A_n -nel az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz esetében az így elkészített összeget. Ez az összeg egy többtényezős szorzat zárójelfelbontás utáni alakjára emlékeztet.

(2 pont)

Valóban, ha az alábbi szorzatban minden tagot minden taggal szorozva felbontjuk a zárójeleket, akkor az A_n -nél 1-gyel nagyobb számot kapunk:

$$A_n + 1 = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad (3 \text{ pont})$$

A zárójeleken belül közös nevezőre hozva:

$$A_n + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1,$$

tehát $A_n = n$. (3 pont)

A feladat kérdésére A_{2016} a válasz, amelynek az értéke a fentiek alapján 2016. (1 pont)

(+1 pont)

Összesen: 10 pont