

XXV. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny
Budapest, 2016. március 11–15.

11. osztály

1. feladat Egy háromszög három oldalának mérőszáma, a, b, c ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Bizonyítsa be, hogy $a^2 + c^2 < 3ac$.

Minda Mihály (Vác)

2. feladat Egy interneten lebonyolított bajnokságon minden résztvevő minden másik résztvevővel pontosan kétszer játszott. Egy mérkőzésen a győztes 2, a vesztes 0 pontot kapott, döntetlen esetén mindkét játékosnak 1-1 pont járt. Az eredménylista összeállítói meglepve tapasztalták, hogy az utolsó helyezett kivételével minden versenyző pontszáma úgy adódik, hogy a közvetlenül mögötte végző pontszámához mindig ugyanazt a páros számot hozzáadjuk. A győztes 2016 pontot szerzett. Hányan vettek részt a versenyen?

Tóth Sándor (Kisvárd)

3. feladat Az ABC derékszögű háromszögben az A csúcsnál levő szög α . Az AB átfogóhoz tartozó magasság az átfogót a D pontban metszi. Az ADC háromszögbe olyan $DEFG$ négyzetet rajzolunk, amelynek E, F és G csúcsai rendre DC -re, CA -ra és AD -re illeszkednek, a CDB háromszögbe pedig olyan $DHIJ$ négyzetet, amelynek H, I és J csúcsai DB -re, BC -re és CD -re esnek. Jelölje t_1 és t_2 a $DEFG$, illetve a $DHIJ$ négyzet területét. Bizonyítsa be, hogy

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{t_1}{t_1 + t_2}}.$$

Bíró Bálint (Eger)

4. feladat Az a_n sorozatban $a_1 = 1$ és $a_n = n(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1})$, ha $n \geq 2$. Határozza meg a_{2016} értékét.

Nagy Piroska Mária (Dunakeszi)
Szoldatics József (Budapest)

5. feladat Jelölje p_n az n -edik prímszámot ($p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$). Bizonyítsa be, hogy minden n pozitív egész szám esetén

$$\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_2 p_3} + \dots + \frac{1}{p_n p_{n+1}} < \frac{1}{3}.$$

Bencze Mihály (Bukarest)

6. feladat Az $ABCD$ paralelogramma A csúcán áthaladó kör az AB, AD oldalakat és az AC átlót rendre az M, N , illetve K pontokban metszi. Bizonyítsa be, hogy

$$AB \cdot AM + AD \cdot AN = AC \cdot AK.$$

Róka Sándor (Nyíregyháza)