26. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Somorja, 2017. március 23-27.

10. osztály

1. feladat: Adott a síkon 2017 (különböző) pont úgy, hogy bármely 3 közül kiválasztható 2, melyek távolsága 1-nél kisebb. Bizonyítsátok be, hogy a 2017 pont között található 1009 olyan, amelyek egységsugarú körben lesznek.

Mészáros József (Jóka)

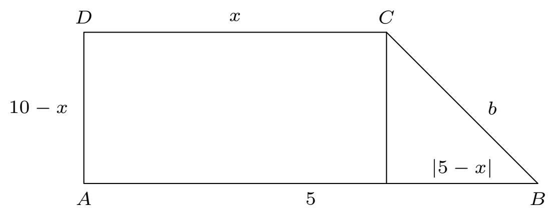
Megoldás: Legyenek A és B a 2017 pont közül a legtávolabb elhelyezkedő pontok és írjunk köréjük $k(A;1)$ és $l(B;1)$ köröket. Legyen C egy tetszőleges pontja az adott ponthalmaznak. A C pont $k(A;1)$-be vagy $l(B;1)$-be fog tartozni (ellenkező esetben a feladat feltétele nem teljesülne). Következésképpen a 2017 pont közül legalább 1009 e körök valamelyikébe fog tartozni.

---

2. feladat: Egy derékszögű trapéz egyik alapja 5 cm, a másik alap és a derékszögű szár összege 10 cm. Mekkora lehet a trapéz területének legnagyobb értéke? Mekkora lehet a trapéz kerületének legkisebb értéke?

Dr. Katz Sándor (Bonyhád)

Megoldás: Ha a másik alap x, akkor a derékszögű szár $10-x$. Így a terület $t = 0,5 \cdot (5 + x) \cdot (10 - x) = 0,5 \cdot (50 + 5x - x^2) = \dfrac{225}{8} - \dfrac{1}{2} \cdot \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2$.



Ennek a maximuma $\dfrac{225}{8} = 28,125$ cm^2. Fejezzük ki a trapéz nem derékszögű b szárát: $b^2 = (10-x)^2 + (5-x)^2 = 2x^2 - 30x + 125 = 2\left(x - \dfrac{15}{2}\right)^2 + 12,5$. A trapéz kerülete $k = 15 + b$. Ez $x = \dfrac{15}{2}$-nél minimális és ekkor $k_{min} = 15 + \sqrt{12,5} = 18,54$ cm.

---

3. feladat: Oldjátok meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{6}{\sqrt{x-2017}-9} + \frac{1}{\sqrt{x-2017}-4} + \frac{7}{\sqrt{x-2017}+4} + \frac{12}{\sqrt{x-2017}+9} = 0.$$

Nemecskó István (Budapest)

Megoldás: Természetesen $x \geq 2017$ és vezessük be a $\sqrt{x-2017} = a$ jelölést. Ekkor $a \geq 0, a \neq 4, a \neq 9$, és $\dfrac{6}{a-9} + \dfrac{1}{a-4} + \dfrac{7}{a+4} + \dfrac{12}{a+9} = 0$.

Innen:

$$\begin{aligned}
6(a+9)(a^2-16)+(a+4)(a^2-81)+7(a-4)(a^2-81)+12(a-9)(a^2-16)&=0\\
(a^2-16)(6a+54+12a-108)+(a^2-81)(a+4+7a-28)&=0\\
(a^2-16)(18a-54)+(a^2-80)(80-24)&=0\\
18(a^2-16)(a-3)+8(a^2-81)(a-3)&=0\\
(a-3)(18a^2-18\cdot 16+8a^2-8\cdot 81)&=0\\
(a-3)(26a^2-936)&=0\\
26(a-3)\cdot(a^2-36)&=0.
\end{aligned}$$

Ebből $a=3$ vagy $a=6$ (mivel $a\geq 0$). Ha $a=3$, akkor $x=2026$. Ha $x=6$, akkor $x=2053$. A valós számok halmazán tehát **két megoldás van**: $x=2026$ és $x=2053$.

---

4. feladat: Van-e 1000 olyan egymást követő egész szám, melyek között pontosan 5 prímszám van?

Róka Sándor (Nyíregyháza)

Megoldás: Először is van 1000 olyan egymást követő egész szám, melyek között **nincs** prímszám, nevezetesen pld. ezek:$1001!+2, 1001!+3, 1001!+4, \ldots, 1001!+1001$.

„Léptessük" a megadott 1000 számot tartalmazó blokkot 1-gyel lefele, azaz mindegyik szám helyett 1-gyel kisebbet veszünk. **Ilyen léptetésnél a blokkban levő prímek száma maximum 1-gyel változhat**, mert egy számot elhagyunk és beveszünk helyette egy másik számot. Vegyük észre, hogy az első 1000 pozitív egész szám között **több, mint 5** prímszám van.

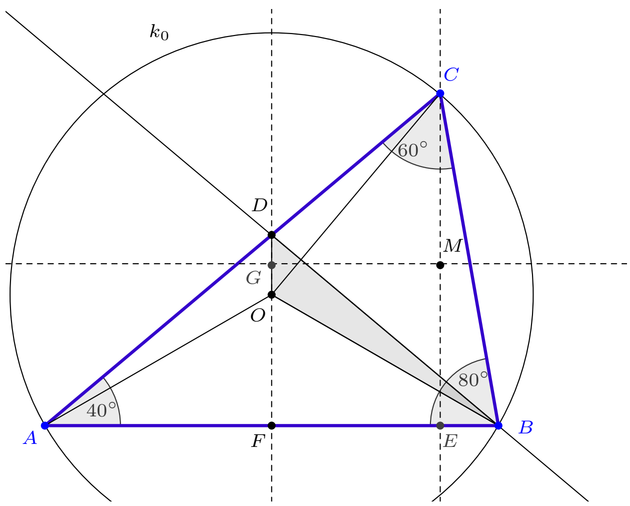
Tehát lefele lépkedve van olyan blokk, amelyben **pontosan** 5 prímszám van.

---

5. feladat: Az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle=40°$ és $CBA\sphericalangle=80°$, a háromszög körülírt körének középpontja az O pont. $CBA\sphericalangle$ szögfelezője a D pontban metszi az AC oldalt. Bizonyítsátok be, hogy a DOB háromszög körülírt körének középpontja az ABC háromszög C pontból induló magasságvonalára illeszkedik!

Bíró Bálint (Eger)

Megoldás: A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk:



Az ABC háromszög belső szögeinek összege $180°$, ezért $ACB\sphericalangle = 60°$. Ez azt is jelenti, hogy az ABC háromszög hegyesszögű háromszög, ezért az ábrán k_O-val jelölt körülírt körének O középpontja a háromszög belső pontja, a C pontból induló magasságvonal E-vel jelölt talppontja pedig az AB szakasz belső pontja.

A BD egyenes felezi a$CBA\sphericalangle$-et, így $DBA\sphericalangle = 40°$, ebből rögtön következik, hogy a DAB háromszög egyenlő szárú háromszög, tehát $DA = DB$.

Eszerint az AB szakasz OF felezőmerőlegesére illeszkedik a D pont, mégpedig úgy, hogy az O pont a DF szakasz belső pontja, hiszen ellenkező esetben a k_O kör O középpontja az ABC háromszög külső pontja lenne.

A DO szakasz felezőpontját G-vel jelöltük, a DOB háromszög körülírt körének középpontja illeszkedik a DO szakasz felezőmerőlegesére, ez az egyenes az ABC háromszögC pontból induló magasságvonalát az$M$pontban metszi. A feladat megoldásához elegendő bizonyítani, hogy az M pont a DOB háromszög körülírt körének középpontja.

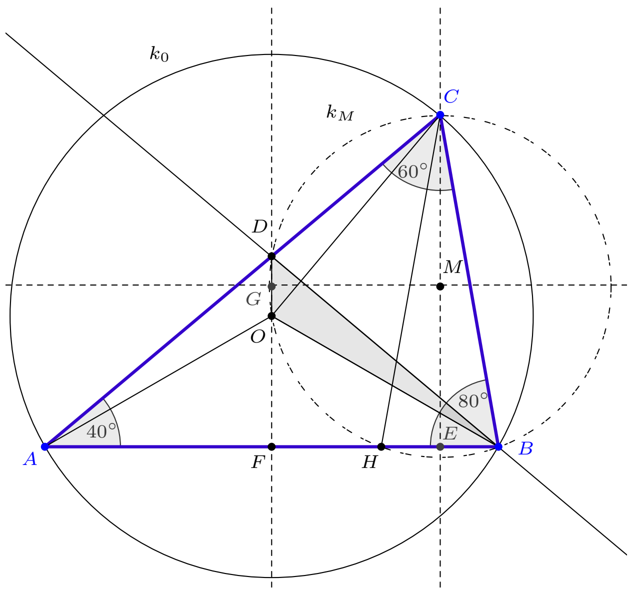
Ehhez először kiszámítjuk a DOB háromszög szögeit.

A középponti és kerületi szögek összefüggése szerint az AOB egyenlőszárú háromszögben $AOB\sphericalangle = 120°$, ezért $FOB\sphericalangle = 60°$, ebből pedig $DOB\sphericalangle = 120°$ adódik. A DFB derékszögű háromszögben pedig $DBF\sphericalangle = 40°$, és így $FDB\sphericalangle = ODB\sphericalangle = 50°$. A DOB háromszög két szöge tehát $DOB\sphericalangle = 120°$ és $ODB\sphericalangle = 50°$, ezzel azt kapjuk, hogy $DBO\sphericalangle = 10°$.

Ugyancsak a középponti és kerületi szögek összefüggése miatt az AOC egyenlőszárú háromszögben $AOC\sphericalangle = 160°$, így $ACO\sphericalangle = DCO\sphericalangle = 10°$.

Azt kaptuk tehát, hogy az OD egyenes ugyanazon oldalán fekvő C és B pontokból az OD szakasz egyaránt $10°$-os szögben látszik, hiszen $DBO\sphericalangle = DCO\sphericalangle = 10°$, ez pedig azt jelenti, hogy a DOB háromszög körülírt körére illeszkedik a C pont.

Ezután megrajzoljuk a DOB háromszög k_M-mel jelölt körülírt körét, amelynek az AB oldallal való második metszéspontját az alábbi ábrán H-val jelöltük.



Az ABC háromszög körülírt körében a középponti és kerületi szögek összefüggéséből adódik, hogy $BOC\sphericalangle = 80°$, eszerint a BC szakasz az O pontból $80°$-os szögben látszik.

ABC szakasz a DOB háromszög körülírt körének húrja, hiszen a C pont a fentiek szerint illeszkedik a k_M körre, ezért ez a húr a kerületi szögek tétele miatt a kör H pontjából ugyancsak 80°-os szögben látszik. Eszerint a CBH háromszög egyenlőszárú háromszög, amelynek HB alapját a CE egyenes merőlegesen felezi.

Mivel pedig a DOB háromszög k_M körülírt körében OD és HB húrok, amelyek felezőmerőlegesei rendre a GM és EM egyenesek, ezek M metszéspontja tehát a DOB háromszög körülírt körének középpontja. Ezzel igazoltuk a feladat állítását, amely szerint a DOB háromszög körülírt körének középpontja éppen az M pont, ez pedig illeszkedik az ABC háromszög C pontból induló magasságvonalára

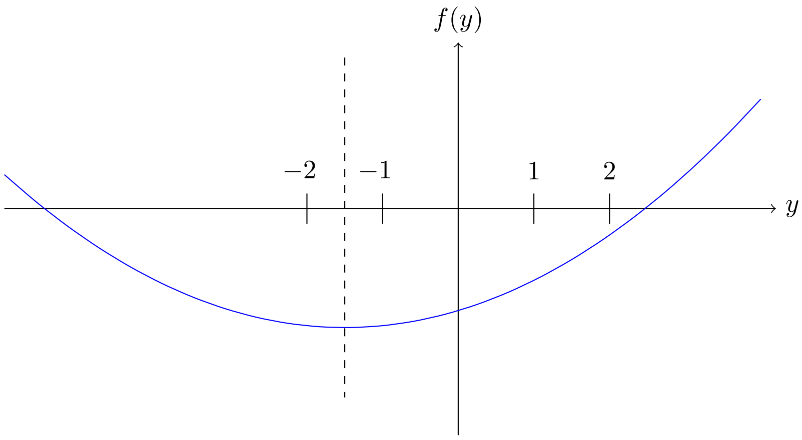
---

6. feladat: A valós számok halmazán oldjátok meg az $x^4+3x^3+px^2+3x+1=0$ egyenletet $p=3{,}25$ esetén! A p paraméter mely értékei esetén lesz az $x^4+3x^3+px^2+3x+1=0$ egyenletnek négy különböző valós gyöke?

Dr. Katz Sándor (Bonyhád)

Megoldás: Az egyenlet reciprok, tehát x^2-tel osztva és $y=x+\dfrac{1}{x}$-et helyettesítve kapjuk az $y^2+3y+p-2=0$ egyenletet. Ennek $p=3{,}25$ esetén két gyöke van: $y=-2,5$ és $y=-0{,}5$. Csak az előbbihez tartozik x (mivel $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$), mégpedig $x=-2$ és $x=-0,5$, tehát $p=3{,}25$ **esetén** az egyenletnek ez a **két valós megoldása van**: $x=-2$ és $x=-0{,}5$.

Mivel az $y=x+\dfrac{1}{x}$ egyenletnek csak $|y|>2$ esetén lesz két különböző megoldása, ezért az $y^2+3y+p-2=0$ egyenletnek két kettőnél nagyobb abszolút értékű gyöke kell legyen.



$f(y)=y^2+3y+p-2=(y+1,5)^2+p-4,25$, ezért a parabola csúcspontjának első koordinátája $-1{,}5$ és ezért két 2-nél nagyobb vagy két -2-nél kisebb gyök nem lehet.

Csak úgy kaphatunk két, az $|y|>2$ feltételnek megfelelő gyököt, ha az egyik gyök -2-nél kisebb, a másik 2-nél nagyobb. Ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy $f(-2)=4-6+9-2<0$ és $f(2)=4+6+p-2<0$. Mindkét feltétel $p<-8$ **esetén** teljesül.