XXVI. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Somorja, 2017

9. osztály

1. feladat: Adott egy síkon 2017 (különböző) pont úgy, hogy nem esik mind egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy meg lehet adni a síkon olyan körlapot, amelynek határán rajta van az adott pontok közül legalább három, de a belsejében egy sem.

Dr. Kántor Sándor (Debrecen)

Megoldás: Vizsgáljuk meg az adott pontokból képezhető pontpárok távolságát. Mivel ezekből csak véges sok van, nyilván van köztük olyan, aminél nincs kisebb. Legyen ez $|AB|$. Az $|AB|$ átmérőjű kör belsejében nincs adott pont, határán van kettő. Az adott pontok között van olyan P pont, amelyik nincs rajta az AB egyenesen (ugyanis nincs minden pont rajta egy egyenesen). Az $\overline{AB}$ szakasz O felezőpontjából induló, AB egyenesre merőleges f félegyenes legyen az AB egyenesnek ugyanazon a partján, mint a P pont.

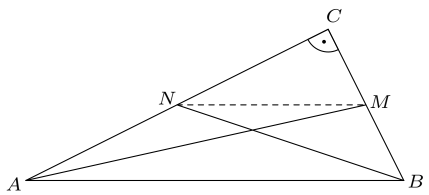
Az f félegyenesen levő K középpontú, $|AK|$ sugarú k körlap alkalmas K-val a keresett körlapot jelenti. Ugyanis k-nak az $\overline{AB}$ húrral lemetszett kisebbik szeletének belseje az $|AB|$ átmérőjű kör belsejében van, ahol nincs adott pont, a nagyobbik szeletében az $|OK|$ nullától induló növelésével akkor kapjuk az alkalmas K-t, ha a határon először jelenik meg valamilyen adott pont: egy C pont, és esetleg vele egyszerre több is. Tehát k belsejében nincs adott pont, határán pedig legalább 3: A, B, C.

---

2. feladat: Az ABC derékszögű háromszögben a CB befogó felezőpontja M, az AC befogó felezőpontja N, ahol $|BN|$=19 és $|AM|$=22 . Mekkora az AB átfogó hossza?

Dr. Kántor Sándorné (Debrecen)

Megoldás: Legyen $|BC| = 2a$, $|AC| = 2b$. Pitagorasz tétele szerint $19^2 = (2a)^2 + b^2$, valamint $22^2 = a^2 + (2b)^2$. Ezeket összeadva $5(a^2 + b^2) = 19^2 + 22^2 = 845$, tehát $a^2 + b^2 = 169$, és innen $|MN| = 13$.



Mivel $|AB|^2 = (2a)^2 + (2b)^2 = 4(a^2 + b^2) = 4 \cdot 169$, így $|AB| = 2 \cdot 13 = 26$). (Vagy: $|AB| = 2 \cdot 13 = 26$), mivel MN az ABC háromszög középvonala.)

---

3. feladat: A táblára felírtunk 2015 darab D betűt, 2016 darab B betűt és 2017 darab C betűt. Ketten játszanak. A soron levő játékos letöröl 2 *nem egyforma* betűt és a harmadikat írja helyükbe. Pld. letöröl egy D-t és egy B-t és felír egy darab C-t. A játék befejeződik, ha csak egyfajta betű maradt a táblán. Ha D betű maradt, akkor a kezdő játékos nyer, ha B maradt, akkor a második nyer, C betű esetén döntetlen. Kinek van nyerő stratégiája? Indokoljátok!

Mészáros József (Jóka)

Megoldás: A játék kezdetén sok betű van, pontosan $2015 + 2016 + 2017$. Könnyen látható, hogy minden lépés után a betűk mennyiségének összege 1-el csökken, tehát a játék végén csak 1 betű marad. Kezdetben a betűk paritása n, p, n. Egy lépésben minden betű száma ± 1-el változik, így a paritás n, p, n-ről p, n, p-re változik, stb.

Tehát a B betűk száma mindig különbözik a D és C betűkétől – ezek paritása mindig egyforma. A játék végén két betűből 0 darab lesz, tehát mindkettő paritása p. Ez csak a D és C betűkkel érhető el, tehát marad a B betű, mégpedig a játék bármilyen lefolyása után. Mivel a játék lefolyásától függetlenül, mindig csak a B betű(k) marad(nak), ezért csak a második nyerhet. Tehát nyerő stratégiája annak a játékosnak van, aki hagyja a másikat kezdeni.

---

4. feladat: A valós számok halmazán oldjuk meg a $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget!

Bálint Béla (Zsolna)

Megoldás: Természetesen $x \neq 0$. Ha $x < 0$, akkor $\frac{1}{x} < 0$, ez pedig ellentmondáshoz vezet: $0 \leq \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2} < 0$. Tehát $x > 0$. Egyúttal $0 \leq \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}$, tehát $x^2 \leq \frac{4}{3}$ és innen $x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, mivel x pozitív. Az adott egyenlőtlenséget négyzetre emelve kapjuk: $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{4}$, innen $\frac{1}{x} < 1$, végül $x > 1$. Az egyenlőtlenség megoldása: $1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

---

5. feladat: Az A természetes szám n darab egyforma számjegyből áll, a B természetes szám szintén n darab egyforma számjegyből áll, a C természetes számot pedig $2n$ darab egyforma számjegy alkotja. Ugyanakkor $n \geq 2$ esetén $A^2 + B = C$ is teljesül. Hány ilyen számjegy hármas teljesíti a feltételeket?

Tóth Sándor (Kisvárda)

Megoldás : Legyen $A = \underbrace{x \dots x}_{n}$, $B = \underbrace{y \dots y}_{n}$, $C = \underbrace{z \dots z}_{n}$, ahol x, y, z számjegyek, tehát $A = \underbrace{1 \dots 1}_{n} \cdot x = \frac{10^n - 1}{9} \cdot x$, $B = \frac{10^n - 1}{9} \cdot y$, $C = \frac{10^{2n} - 1}{9} \cdot z$. Ezeket az $A^2 + B = C$ egyenlőségbe helyettesítve kapjuk $\frac{(10^n - 1)^2}{81} \cdot x^2 + \frac{10^n - 1}{9} \cdot y = \frac{10^{2n} - 1}{9} \cdot z$.

Beszorozva 81-el és osztva $(10^n - 1)$-el kapjuk:$(10^n - 1)x^2 + 9y = 9(10^n + 1)z$, majd rövid átalakítások után

$$(10^n - 1)(x^2 - 9z) = 9(2z - y) \qquad (*)$$

Ha $x^2 - 9z = 0$, akkor szintén $2z - y = 0$ és ez megoldást ad minden $n \geq 2$ -re, mégpedig $z = 1, x = 3, y = 2$, vagy $z = 4, x = 6, y = 8$ megoldásokat.

Ha $x^2 - 9z \neq 0$, akkor az n paraméterre két esetet vizsgálunk meg.

a) $n = 2$ esetén az (*) egyenlet alakja $11(x^2 - 9z) = 2z - y$, tehát 11 osztja a $(2z - y)$-t. Ezt kétféleképpen lehetséges: vagy $2z - y = 11$, és ekkor $x^2 - 9z = 0$, ami a feljebb említett megoldásokat adja, vagy $2z - y = 11$ (ugyanis $-9 \leq 2z - y \leq 18$). Az utóbbi esetben $x^2 - 9z = 1$ és mivelhogy x, y, z számjegyek, egyetlen megoldás van: $z = 7, x = 8, y = 3$.

b) $n \geq 3$ esetén az (*) egyenletben $10^n - 1 \geq 999$, tehát csak a $2z - y = 0$ és $x^2 - 9z = 0$ ad megoldást, amit már viszont feljebb vizsgáltunk.

Összegezve: Minden $n \geq 2$ -re két megoldás van, mégpedig $z = 1$, $x = 3$, $y = 2$ vagy $z = 4$, $x = 6$, $y = 8$, viszont $n = 2$ esetén $z = 7$, $x = 8$, $y = 3$ számjegy hármas is megoldás.

---

6. feladat: Határozzuk meg az összes olyan n természetes számot, amelyekre $n^2 - 10 + 23, n^2 - 9n + 31$ és $n^2 - 12n + 46$ prímszámok!

Kiss Alexandra és Fedorszki Ádám (Beregszász)

Megoldás: Az adott három szám összege $n^2 - 10 + 23 + n^2 - 9n + 31 + n^2 - 12n + 46 = 3n^2 - 31n + 100 = 2n^2 - 30n(n + 1) + 100$. Itt minden összeadandó páros, tehát az összeg páros. Ha a három szám mindegyike prímszám, akkor pontosan az egyik egyenlő kettővel. Sem $n^2 - 12n + 46 = 2$ az egyenletnek sem pedig az $n^2 - 9n + 31 = 2$ egyenletnek nincs természetes gyöke. Tehát $n^2 - 10 + 23 = 2$, és innen $n = 3$ vagy $n = 7$. Még meg kell vizsgálni, hogy ezek prímszámokat adnak-e.

Ha $n = 3$, akkor $n^2 - 9n + 31 = 13$ és $n^2 - 12n + 46 = 19$, tehát prímszámok.

Ha $n = 7$, akkor $n^2 - 9n + 31 = 17$ és $n^2 - 12n + 46 = 11$ tehát prímszámok.

Válasz: a keresett számok $n = 3$ és $n = 7$.