25. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Budapest, 2016. március 11-15.

11. osztály

1. feladat: Egy háromszög három oldalának mérőszáma, a, b, c ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Bizonyítsa be, hogy $a^2 + c^2 < 3ac$.

Minda Mihály (Vác)

1. megoldás: A háromszög-egyenlőtlenség szerint $a + b > c$ és $b + c > a$, így $b > c - a$ és $b > a - c$, ami azt jelenti, hogy $|a - c| < b$.

Mivel a, b és c egy pozitív tagú mértani sorozat három egymást követő tagja, ezért $b = \sqrt{ac}$.

Így most $|a - c| < \sqrt{ac}$.

Innen négyzetre emelés (mindkét oldal nemnegatív), majd átrendezés után a kívánt $a^2 + c^2 < 3ac$ egyenlőtlenség adódik.

Megjegyzés: Mivel a háromszög-egyenlőtlenséget szokás úgy is kimondani, hogy a háromszög bármely oldala nagyobb, mint a másik két oldal különbsége, ezért a $b > c - a$ és $b > a - c$ összefüggések erre való hivatkozással is elfogadhatók.

Ha a mértani sorozat hányadosa q, akkor $b = aq$, $c = aq^2$ és a megoldás könnyen átfogalmazható ezekkel a jelölésekkel, a megfelelő pontszámok ekkor is járnak.

2. megoldás: Ha β jelöli az a és c oldalak által bezárt szöget, akkor a koszinusztétel alapján $a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2$.

Mivel a, b és c egy pozitív tagú mértani sorozat három egymást követő tagja, ezért $b = \sqrt{ac}$.

Így most $a^2 + c^2 = ac(1 + 2\cos\beta)$.

Mivel $\cos\beta < 1$, ezért $a^2 + c^2 < 3ac$.

---

2. feladat: Egy interneten lebonyolított bajnokságon minden résztvevő minden másik résztvevővel pontosan kétszer játszott. Egy mérkőzésen a győztes 2, a vesztes 0 pontot kapott, döntetlen esetén mindkét játékosnak 1-1 pont járt. Az eredménylista összeállítói meglepve tapasztalták, hogy az utolsó helyezett kivételével minden versenyző pontszáma úgy adódik, hogy a közvetlenül mögötte végző pontszámához mindig ugyanazt a páros számot hozzáadjuk. A győztes 2016 pontot szerzett. Hányan vettek részt a versenyen?

Tóth Sándor (Kisvárda)

Megoldás: Legyen a résztvevők száma n, ekkor összesen $n(n-1)$ mérkőzést játszottak, és így az összpontszám $2n(n-1)$.

Ha az utolsó helyezett b pontot ért el, és minden versenyző d ponttal többet kapott, mint a mögötte végző, akkor az összpontszám ennek a számtani sorozatnak az összege: $\dfrac{(2b + (n-1)d)n}{2}$.

Az összpontszám kétféle felírását összevetve és rendezve $2b = (n-1)(4-d)$ adódik.

Innen $4 - d \geq 0$ és d párossága miatt csak $d = 2$ és 4 lehetséges.

A győztes pontszáma $2016 = b + (n-1)d$, ahonnan $b = 2016 - (n-1)d$.

Ezt a $2b = (n-1)(4-d)$ összefüggésbe beírva és rendezve $4032 = (n-1)(d+4)$ adódik.

Ide $d = 2$-t, illetve 4-et behelyettesítve azt kapjuk, hogy a résztvevők száma $n = 673$ vagy $n = 505$.

Ezek valóban megoldások, mert mindkét létszám esetén megvalósulhat a pontszámok között megadott összefüggés:

Ha $d = 4$, $n = 505$, akkor megfelel, ha mindenki mindkétszer legyőzi a nála kisebb rajtszámúakat, ekkor a pontszámok: $0, 4, 8, \ldots, 2012, 2016$.

Ha $d = 2$, $n = 673$, akkor megfelel, ha mindenki egyszer megveri a nála kisebb rajtszámúakat, a második mérkőzés pedig mindenhol döntetlen.
Ekkor a pontszámok: $672, 674, \ldots, 2014, 2016$.

Megjegyzés: Ha d páratlan is lehet, akkor még $d = 1$ és $d = 3$ jön szóba. Az elsőre n nem lesz egész szám, a másodikból $n = 577$. Erre is teljesíthetők a pontszámokra előírt kikötések: Mivel $2b = n-1$, így $2b+1(= 577)$ versenyző van, akiknek rendre b, $b+3$, $b+6$, $\ldots$, $7b(= 2016)$ pontot kell elérniük. Az első mérkőzésen mindenki győzze le a nála kisebb rajtszámúakat, ekkor a kapott pontszámok: $0, 2, 4, \ldots, 4b$. Ezért a második mérkőzés során rendre az alábbi pontszámokat kell megszerezniük: $b, b+1, b+2, \ldots, 3b$. Ez teljesül, ha az azonos paritású rajtszámúak döntetlenre játszanak, a különböző paritásúak mérkőzésén pedig a nagyobb rajtszámú győz.

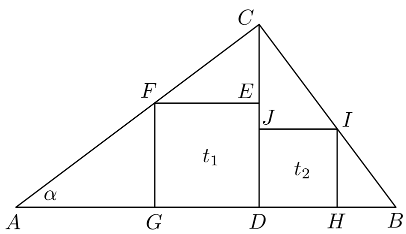
---

3. feladat: Az ABC derékszögű háromszögben az A csúcsnál levő szög α. Az AB átfogóhoz tartozó magasság az átfogót a D pontban metszi. Az ADC háromszögbe olyan $DEFG$ négyzetet rajzolunk, amelynek E, F és G csúcsai rendre DC-re, CA-ra és AD-re illeszkednek, a CDB háromszögbe pedig olyan $DHIJ$ négyzetet, amelynek H, I és J csúcsai DB-re, BC-re és CD-re esnek. Jelölje t_1 és t_2 a $DEFG$, illetve a $DHIJ$ négyzet területét. Bizonyítsa be, hogy

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{t_1}{t_1 + t_2}}\,.$$

Bíró Bálint (Eger)

1. megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



A CDB és az ADC részháromszögek hasonlók, és a hasonlóság aránya

$$\frac{CB}{AC} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Ennél a hasonlóságnál a szóban forgó két négyzet is egymásnak van megfeleltetve, ezért területeik aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő:

$$\frac{t_2}{t_1} = \operatorname{tg}^2\alpha.$$

Innen a t_2/t_1 arányra a

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$$

képletet kapjuk, amelyből átrendezéssel a feladat állítása közvetlenül következik.

2. megoldás: Mivel $t_1 = DF^2/2$ és $t_2 = DI^2/2$,
ezért

$$\sqrt{\frac{t_2}{t_1+t_2}} = \sqrt{\frac{DF^2}{DF^2+DI^2}}.$$

Az FDI háromszög D-nél derékszögű, így $DF^2 + DI^2 = FI^2$. A DI/DF arány egyenlő a CDB és ADC háromszögek hasonlósági arányával, azaz a CB/CA aránnyal. Ezért az FDI háromszög hasonló az ACB háromszöghöz. Emiatt $CFI\sphericalangle = \alpha$, és így $\cos\alpha = DF/FI$.

Ezekből tehát valóban

$$\sqrt{\frac{t_2}{t_1+t_2}} = \sqrt{\frac{DF^2}{FI^2}} = \frac{DF}{FI} = \cos\alpha.$$

---

4. feladat: Az a_n sorozatban $a_1 = 1$ és $a_n = n\,(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1})$, ha $n \geq 2$. Határozza meg a_{2016} értékét.

Nagy Piroska Mária (Dunakeszi)

Szoldatics József (Budapest)

1. megoldás: Legyen $n \geq 3$. Alkalmazzuk $(n-1)$-re és n-re a rekurziós összefüggést:

$$a_{n-1} = (n-1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}), \quad \text{így} \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{n-1} \tag{1}$$

$$a_n = n(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1}) = n\left(\frac{a_{n-1}}{n-1} + a_{n-1}\right) = \frac{n^2}{n-1} \cdot a_{n-1}. \tag{2}$$

Ezt az átalakítást tovább használva teleszkopikus szorzatot kapunk:

$$a_n = \frac{n^2}{n-1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n-2} \cdot \frac{(n-2)^2}{n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{3^2}{2} \cdot a_2.$$

Az egyszerűsítéseket elvégezve, felhasználva az $a_2 = 2$ értéket a_n-et zárt alakban tudjuk kifejezni:

$$a_n = \frac{n \cdot n!}{2}.$$

Tehát $a_{2016} = 1008 \cdot 2016!$.

2. megoldás: Használjuk az $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ jelölést. Számoljunk ki néhány kezdőértéket:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 48, \ldots$$

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 3 = \frac{3!}{2}, \quad S_3 = 12 = \frac{4!}{2}, \ldots.$$

Az a sejtésünk, hogy $S_n = \dfrac{(n+1)!}{2}$. Ezt teljes indukcióval fogjuk belátni.
Az összefüggés $n = 1$-re igaz. Feltételezzük, hogy $n = k$-ra is teljesül:

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = \frac{(k+1)!}{2}.$$

Bizonyítjuk az állítást $n = k+1$-re.

A sorozat képzési szabálya és az indukciós feltétel alapján:

$$S_{k+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = \frac{(k+1)!}{2} + (k+1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) =$$
$$= \frac{(k+1)!}{2} + (k+1) \cdot S_k = \frac{(k+1)!}{2} \cdot (1 + k + 1) = \frac{(k+2)!}{2}. \qquad (3)$$

Ezzel sejtésünket beláttuk.

Felhasználva a most bizonyított összefüggést:

$$a_n = n \cdot S_{n-1} = \frac{n \cdot n!}{2}.$$

Tehát $a_{2016} = 1008 \cdot 2016!$.

---

5. feladat: Jelölje p_n az n-edik prímszámot ($p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$). Bizonyítsa be, hogy minden n pozitív egész szám esetén

$$\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_2 p_3} + \ldots + \frac{1}{p_n p_{n+1}} < \frac{1}{3}.$$

Bencze Mihály (Bukarest)

Megoldás: Ha S_n jelöli a feladatban szereplő összeget, akkor $S_1 = 1/6 < 1/3$, különben pedig

$$2S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{p_2 p_3} + \ldots + \frac{2}{p_n p_{n+1}},$$

Mivel $p_{k+1} - p_k \geq 2$, ezért

$$\frac{2}{p_2 p_3} + \ldots + \frac{2}{p_n p_{n+1}} \leq \frac{p_3 - p_2}{p_2 p_3} + \ldots + \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n p_{n+1}},$$

ahol a jobb oldalt teleszkopikus összegként írhatjuk fel:

$$\frac{p_3 - p_2}{p_2 p_3} + \ldots + \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n p_{n+1}} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_3} - \frac{1}{p_4} + \ldots + \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_{n+1}}.$$

Ebből következően

$$2S_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{p_2} = \frac{2}{3},$$

ahonnan a bizonyítandó $S_n < 1/3$ egyenlőtlenséget nyerjük.

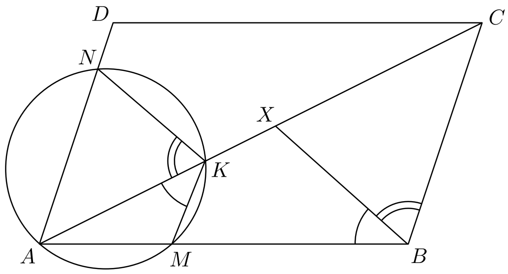
---

6. feladat: Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsán áthaladó kör az AB, AD oldalakat és az AC átlót rendre az M, N, illetve K pontokban metszi. Bizonyítsa be, hogy

$$AB \cdot AM + AD \cdot AN = AC \cdot AK.$$

Róka Sándor (Nyíregyháza)

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit.



A paralelogramma B-nél levő szöge is és az $AMKN$ húrnégyszög K-nál levő szöge is $180°$-ra egészíti ki az A-nál levő szöget, ezért $ABC\sphericalangle = MKA\sphericalangle + AKN\sphericalangle$. Felvehetünk tehát az AC átlón egy olyan X pontot, hogy a BX szakasz az ABC szöget az $ABX\sphericalangle = MKA\sphericalangle$ és $XBC\sphericalangle = AKN\sphericalangle$ részekre bontsa fel.

Az AMK háromszög és az AXB háromszög hasonló, mert az A-nál levő szögük közös, és a K-nál, illetve B-nél levő szögük a konstrukció folytán egyenlő.

Emiatt
$$\frac{AM}{AK} = \frac{AX}{AB}, \quad \text{azaz} \quad AB \cdot AM = AK \cdot AX.$$

Az ANK háromszög és a CXB háromszög hasonló, mert az A-nál, illetve C-nél levő szögük két váltószög lévén egyenlő, valamint a K-nál, illetve B-nél levő szögük a konstrukció folytán egyenlő.

Ezért
$$\frac{AN}{AK} = \frac{CX}{CB}, \quad \text{azaz} \quad (CB = AD \text{ miatt}) \quad AD \cdot AN = AK \cdot CX.$$

A két egyenlőséget összeadva a kívánt $AB \cdot AM + AD \cdot AN = AK \cdot (AX + CX) = AK \cdot AC$ formula adódik.