

## 25. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Budapest, 2016. március 11-15.

### 10. osztály

**1. feladat:** Egy diák megírt már néhány dolgozatot, és az utolsó megírása előtt számolgat: Ha az utolsót 97 pontosra írom, akkor az átlagom 90 pont lesz, ha csak 73 pontra sikerül, akkor 87 pont lesz az átlagom. Hány dolgozatot írt eddig a diák, és mennyi volt az átlagpontszáma?

*Katz Sándor (Bonyhád)*

**1. megoldás:** Ha a diák eddig  $x$  dolgozatot írt, és az átlaga  $y$  pont, akkor  $xy$  pontja van. Ha az utolsó dolgozatot 97 pontra írja, akkor az átlaga

$$\frac{xy + 97}{x + 1} = 90,$$

ha 73 pontra, akkor

$$\frac{xy + 73}{x + 1} = 87.$$

Az egyenleteket rendezve:

$$\begin{aligned} xy + 97 &= 90x + 90 \\ xy + 73 &= 87x + 87. \end{aligned} \tag{1}$$

A két egyenletet kivonjuk egymásból:

$$\begin{aligned} 24 &= 3x + 3 \\ x &= 7. \end{aligned} \tag{2}$$

Így  $xy = 90x - 7 = 623$ ,  $y = 623/7 = 89$ . Tehát a diák eddig 7 dolgozatot írt és az átlaga 89 pont volt.

Ellenőrzés: A dolgozatok átlaga  $(623 + 97)/8 = 90$  és  $(623 + 73)/8 = 87$  lehet az utolsó dolgozat megírása után, tehát a megoldás megfelel a feltételeknek.

**2. megoldás:** Ha az utolsó dolgozatot 97 pont helyett 73 pontot szerez a diák, akkor az összpontszáma 24-gyel lesz kevesebb.

Az átlag így 90-ről 87-re csökken, azaz 3 ponttal lesz kisebb. Ez csak úgy lehetséges, ha az átlagot 8 dolgozatra számoljuk.

Tehát eddig 7 dolgozatot írt a diák.

Az utolsó dolgozat írása előtt  $90 \cdot 8 - 97 = 623$  volt az összpontszáma, az átlaga pedig  $623/7 = 89$  pont.

Ellenőrzés: Ha a 623 ponthoz a 8. dolgozattal 73 pontot szerez a diák, akkor valóban  $(623 + 73)/8 = 87$  pont lesz az átlaga.

---

**2. feladat:** Hányféleképpen lehet sorrendbe állítani a RENDETLENÜL szó betűit úgy, hogy ne álljon két E betű egymás mellett? (Minden betűt pontosan egyszer használunk fel.)

*Bálint Béla (Zsolna)*

**1. megoldás:** Először rendezzük el az E-től különböző betűket, nyolc betűt, köztük két-két azonosat: R D T Ü N N L L.

A 8 betűt  $8!$  féle módon rendezhetjük sorba, de a két N betűt és a két L betűt egymás között felcserélve nem kapunk új esetet (ismétléses permutáció), ezért  $\frac{8!}{2 \cdot 2}$  lehetőségünk van ezeknek a betűknek a sorba rendezéséhez.

Az E betűket az így kialakult „szó” elé, utána vagy a betűk közé, tehát 9 helyre tehetjük le. 9 helyből kell kiválasztanunk 3-at úgy, hogy a sorrend nem számít. Ez  $\binom{9}{3}$  lehetőség.

Ezért  $\frac{8!}{4} \cdot \binom{9}{3} = 10\,080 \cdot 84 = 846\,720$  esetet kapunk.

*Megjegyzés:* A végeredményt elfogadjuk  $\frac{8!}{4} \cdot \binom{9}{3}$  alakban, a maximális pontszámot a tanuló akkor is megkapja, ha nem számolja ki ennek az értékét.

**2. megoldás:** A RENDETLENÜL szó 11 betűből áll, ezek között van három E betű, két N betű és két L betű. A 11 betűt  $11!$  féle módon rendezhetjük sorba, a három E betűt, a két N betűt és a két L betűt egymás között felcserélve nem kapunk új esetet (ismétléses permutáció), ezért  $\frac{11!}{3! \cdot 2 \cdot 2}$  lehetőségünk van ezeknek a betűknek a sorba rendezéséhez.

Ezek között azok az esetek, amelyekben egymás mellett szerepelnek E betűk, számunkra rosszak, amelyeket le fogunk vonni. Ha két E betű szerepel egymás mellett, akkor tekintsük ezeket egy karakternek, a harmadik E betűt pedig egy szimpla jelnek.

Most 10 karaktert rendezünk sorba, köztük kettő-kettő azonos. Ilyen eset  $\frac{10!}{2 \cdot 2}$  van.

Ha három E betű szomszédos, akkor előbb az ilyen eseteket kétszer számoltuk, tehát ezek számát majd vissza kell adnunk.

Legyen most EEE egyetlen jel, ilyen eset  $\frac{9!}{2 \cdot 2}$  van.

A feladat feltételeinek megfelelő sorbarendezések száma  $\frac{11!}{3! \cdot 2 \cdot 2} - \frac{10!}{2 \cdot 2} + \frac{9!}{2 \cdot 2} = 846\,720$ .

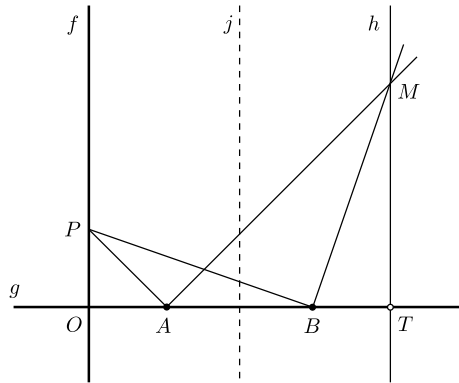
*Megjegyzés:* A végeredményt elfogadjuk  $\frac{11!}{3! \cdot 2 \cdot 2} - \frac{10!}{2 \cdot 2} + \frac{9!}{2 \cdot 2}$  alakban, a maximális pontszámot a tanuló akkor is megkapja, ha nem számolja ki ennek az értékét.

---

**3. feladat:** Adott a síkban két egymásra merőleges egyenes,  $f$  és  $g$ , valamint a  $g$  egyenesen két pont,  $A$  és  $B$ , amelyek egymástól is és a két egyenes metszéspontjától is különböznek. Az  $f$  egyenes egy tetszőleges  $P$  pontját az adott pontokkal összekötő egyenesekre merőlegeseket állítunk az  $A$  és  $B$  pontokban. Határozza meg a merőlegesek metszéspontjainak a halmazát, ha  $P$  végigfut az  $f$  egyenesen.

*Kántor Sándorné (Debrecen)*

**1. megoldás:** Jelöljük  $O$ -val  $f$  és  $g$  metszéspontját. A feladat szerinti  $M$  metszéspont minden olyan esetben előáll, amikor  $P \neq O$ , hiszen ilyenkor  $PA$  és  $PB$  nem párhuzamos, és így a rájuk állított merőlegesek sem azok.



Legyen  $T$  az  $M$  pont merőleges vetülete a  $g$  egyenesen. Ekkor az  $ATM$ ,  $BTM$ ,  $PAM$ ,  $PBM$ ,  $POA$  és  $POB$  derékszögű háromszögekre a Pitagorasz-tételt fölírva

$$\begin{aligned} AT^2 - BT^2 &= (AM^2 - TM^2) - (BM^2 - TM^2) = AM^2 - BM^2 = \\ &= (PM^2 - PA^2) - (PM^2 - PB^2) = PB^2 - PA^2 = \\ &= (PO^2 + OB^2) - (PO^2 + OA^2) = OB^2 - OA^2 \end{aligned}$$

adódik, ami nem függ  $P$  választásától.

Azt állítjuk, hogy a  $T$  talppontot az  $AT^2 - BT^2$  mennyiség egyértelműen meghatározza. Valóban, ha a  $g$  egyenes mentén az  $O$ ,  $A$ ,  $B$  és  $T$  pontot rendre a  $0$ ,  $a$ ,  $b$  és  $x$  koordináta adja meg, akkor

$$b^2 - a^2 = OB^2 - OA^2 = AT^2 - BT^2 = (x - a)^2 - (x - b)^2 = 2(b - a)x + a^2 - b^2,$$

ahonnan  $a \neq b$  miatt  $x$  egyértelműen kifejezhető:

$$x = \frac{2b^2 - 2a^2}{2(b - a)} = a + b.$$

Az összes  $M$  metszéspont ezért a  $g$  egyenesre ugyanabban a  $T$  pontban állított  $h$  merőleges egyenesre illeszkedik.

Ez a  $T$  pont az  $x = a + b$  összefüggés miatt az  $O$  pontnak az  $AB$  szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe.

A  $h$  egyenesen tetszőlegesen kiszemelt  $M \neq T$  pontból kiindulva a feladat konstrukcióját  $P$  és  $M$  szerepcseréjével végrehajtva visszakapjuk  $P$ -t. Ezért magát a  $T$  pontot kivéve a  $h$  egyenes minden pontja hozzátartozik a keresett halmazhoz.

**2. megoldás:** Használjuk az 1. megoldás jelöléseit. Ha  $P \neq O$ , akkor az  $M$  pont előáll, valamint az  $A$ ,  $B$  pontok a  $PM$  átmérőjű körre illeszkednek, hiszen a  $PM$  szakasz  $A$ -ból és  $B$ -ből is derékszög alatt látszik.

Az  $AB$  szakasz ennek a körnek húrja, tehát az azt merőlegesen felező  $j$  egyenes áthalad a kör középpontján, vagyis  $PM$  felezőpontján.

Ezért  $M$  rajta van az  $f$  egyenes  $j$ -re vonatkozó tükörképén, a  $h$  egyenesen.

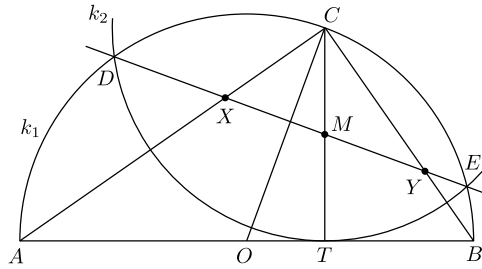
Az  $M$  pont biztosan különbözik  $g$  és  $h$  metszéspontjától, azaz a  $T$  ponttól, hiszen a  $g$  egyenesnek a körrel csak két közös pontja ( $A$  és  $B$ ) lehet.

Megfordítva, ha a  $h$  egyenesen kiszemelt  $M$  pont különbözik  $T$ -től, akkor tekintsük az  $A$ ,  $B$  és  $M$  (nem kollineáris) pontokon áthaladó kört, és annak az  $M$ -mel átellenes  $P$  pontját. Ez a  $P$

egyrészt illeszkedik  $f$ -re, másrészt  $P$ -ből kiindulva a feladat konstrukciójával  $M$ -et származtatja. Ezért a  $T$  pont kivételével  $h$  minden pontja előáll  $M$ -ként.

**4. feladat:** Legyen az  $AB$  átmérőjű  $k_1$  kör egy  $A$ -tól és  $B$ -től különböző pontja  $C$ . Bocsássunk merőlegest a  $C$  pontból  $AB$ -re, a merőleges talppontja  $T$ . A  $C$  középpontú,  $CT$  sugarú  $k_2$  kör a  $k_1$  kört a  $D$  és  $E$  pontokban metszi. A  $DE$  és  $CT$  szakaszok metszéspontja  $M$ , a  $CA$  és  $DE$ , valamint a  $CB$  és  $DE$  szakaszok metszéspontjai rendre  $X$  és  $Y$ . Bizonyítsa be, hogy  $MX = MY$ .  
*Bíró Bálint (Eger)*

**Megoldás:** Használjuk az ábra jelöléseit.



Az  $AB$  szakasz  $O$  felezőpontja a  $k_1$  kör középpontja. A  $CO$  szakasz a két kör középpontját köti össze, ezért merőleges a közös  $DE$  húrra.

Thalész tétele miatt az  $ABC$  háromszög  $C$ -nél derékszögű.

Az  $XYC$  szög és az  $OCA$  szög merőleges szárú hegyesszögek, ezért  $XYC \sphericalangle = OCA \sphericalangle$ . Ugyanígy  $YXC \sphericalangle = OCB \sphericalangle$ .

A  $CAO$  háromszög egyenlő szárú, ezért  $OCA \sphericalangle = CAO \sphericalangle$ . Ugyanígy  $OCB \sphericalangle = OBC \sphericalangle$ .

A  $CAB$  szög és a  $BCT$  szög merőleges szárú hegyesszögek, ezért  $CAB \sphericalangle = BCT \sphericalangle$ . Ugyanígy  $ABC \sphericalangle = TCA \sphericalangle$ .

Az egyenlőségeket összevetve  $MYC \sphericalangle = MCY \sphericalangle$  és  $MXC \sphericalangle = MCX \sphericalangle$  következik, ami azt jelenti, hogy a  $CXM$  és a  $CYM$  háromszögek egyenlő szárúak. A szárak egyenlősége folytán  $MX = MC = MY$ .

**5. feladat:** Bizonyítsa be, hogy  $n+1$  darab különböző,  $2n$ -nél kisebb pozitív egész szám közül kiválasztható három különböző úgy, hogy ezek közül kettő összege megegyezzen a harmadikkal.  
*Bencze Mihály (Bukarest)*

**Megoldás:** Legyen az adott  $n+1$  szám:  $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ . Képezzük az  $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{n+1} - a_1$  számokat, amelyek különbözőek, pozitívak és kisebbek, mint  $2n$ .

Tekintsük a következő  $2n$  darab,  $2n$ -nél kisebb pozitív egész számot:

$$a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{n+1} - a_1.$$

A skatulyaelv szerint ezek közül kettő megegyezik.

A feltételekből következik, hogy az egyik szám az  $a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$  számok közül való, a másik pedig az  $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{n+1} - a_1$  számok közül.

Legyenek ezek  $a_k$  és  $a_m - a_1$ . Ekkor  $a_k = a_m - a_1$ , azaz teljesül, hogy

$$a_k + a_1 = a_m.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

**6. feladat:** Képezzük az  $\{1, 2, 3, \dots, 2016\}$  halmaz minden nemüres részhalmazát. Az egy részhalmazban lévő számokat szorozzuk össze és vegyük a szorzat reciprokát, majd ezeket adjuk össze. (Ha a halmaz egyelemű, akkor egytényezős szorzatnak tekintjük és ennek vesszük a reciprokát.) Mekkora az így kapott összeg?

*Kántor Sándor (Debrecen)*

**1. megoldás:** Jelöljük  $A_n$ -nel az  $\{1, 2, \dots, n\}$  halmaz esetében az így elkészített összeget.

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, & A_2 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} = 2, \\ A_3 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3. \end{aligned} \quad (3)$$

Az a sejtésünk, hogy minden  $n > 0$  természetes szám esetén  $A_n = n$ , így  $A_{2016} = 2016$ . Teljes indukcióval bizonyítjuk állításunkat.

A sejtés  $n = 1$ -re igaz. Feltételezzük, hogy  $n = k$ -ra is teljesül:

$$A_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = k.$$

Bizonyítjuk az állítást  $n = k + 1$ -re:

$$A_{k+1} = A_k + \frac{1}{k+1} + A_k \cdot \frac{1}{k+1}.$$

Felhasználjuk az indukciós feltételt:

$$A_{k+1} = k + \frac{1}{k+1} + k \cdot \frac{1}{k+1} = k + \frac{k+1}{k+1} = k+1.$$

Ezzel sejtésünket beláttuk. Tehát a keresett összeg valóban 2016.

**2. megoldás:** Jelöljük  $A_n$ -nel az  $\{1, 2, \dots, n\}$  halmaz esetében az így elkészített összeget. Ez az összeg egy többtényezős szorzat zárójelfelbontás utáni alakjára emlékeztet.

Valóban, ha az alábbi szorzatban minden tagot minden taggal szorozva felbontjuk a zárójeleket, akkor az  $A_n$ -nél 1-gyel nagyobb számot kapunk:

$$A_n + 1 = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

A zárójeleken belül közös nevezőre hozva:

$$A_n + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1,$$

tehát  $A_n = n$ .

A feladat kérdésére  $A_{2016}$  a válasz, amelynek az értéke a fentiek alapján 2016.