# *25. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny*

*Budapest, 2016. március 11-15.*

## 10. osztály

**1. feladat:** Egy diák megírt már néhány dolgozatot, és az utolsó megírása előtt számolgat: Ha az utolsót 97 pontosra írom, akkor az átlagom 90 pont lesz, ha csak 73 pontra sikerül, akkor 87 pont lesz az átlagom. Hány dolgozatot írt eddig a diák, és mennyi volt az átlagpontszáma?

*Katz Sándor (Bonyhád)*

**1. megoldás:** Ha a diák eddig $x$ dolgozatot írt, és az átlaga $y$ pont, akkor $xy$ pontja van. Ha az utolsó dolgozatot 97 pontra írja, akkor az átlaga

$$\frac{xy+97}{x+1}=90,$$

ha 73 pontra, akkor

$$\frac{xy+73}{x+1}=87.$$

Az egyenleteket rendezve:

$$\begin{aligned} xy+97&=90x+90\\ xy+73&=87x+87. \end{aligned} \tag{1}$$

A két egyenletet kivonjuk egymásból:

$$\begin{aligned} 24&=3x+3\\ x&=7. \end{aligned} \tag{2}$$

Így $xy=90x-7=623$, $y=623/7=89$. Tehát a diák eddig 7 dolgozatot írt és az átlaga 89 pont volt.

Ellenőrzés: A dolgozatok átlaga $(623+97)/8=90$ és $(623+73)/8=87$ lehet az utolsó dolgozat megírása után, tehát a megoldás megfelel a feltételeknek.

**2. megoldás:** Ha az utolsó dolgozaton 97 pont helyett 73 pontot szerez a diák, akkor az összpontszáma 24-gyel lesz kevesebb.

Az átlag így 90-ről 87-re csökken, azaz 3 ponttal lesz kisebb. Ez csak úgy lehetséges, ha az átlagot 8 dolgozatra számoljuk.

Tehát eddig 7 dolgozatot írt a diák.

Az utolsó dolgozat írása előtt $90\cdot 8-97=623$ volt az összpontszáma, az átlaga pedig $623/7=89$ pont.

Ellenőrzés: Ha a 623 ponthoz a 8. dolgozattal 73 pontot szerez a diák, akkor valóban $(623+73)/8=87$ pont lesz az átlaga.

---

**2. feladat:** Hányféleképpen lehet sorrendbe állítani a RENDETLENÜL szó betűit úgy, hogy ne álljon két E betű egymás mellett? (Minden betűt pontosan egyszer használunk fel.)

*Bálint Béla (Zsolna)*

**1. megoldás:** Először rendezzük el az E-től különböző betűket, nyolc betűt, köztük két-két azonosat: R D T Ü N N L L.

A 8 betűt 8! féle módon rendezhetjük sorba, de a két N betűt és a két L betűt egymás között felcserélve nem kapunk új esetet (ismétléses permutáció), ezért $\frac{8!}{2\cdot 2}$ lehetőségünk van ezeknek a betűknek a sorba rendezéséhez.

Az E betűket az így kialakult „szó” elé, utána vagy a betűk közé, tehát 9 helyre tehetjük le. 9 helyből kell kiválasztanunk 3-at úgy, hogy a sorrend nem számít. Ez $\binom{9}{3}$ lehetőség.

Ezért $\frac{8!}{4}\cdot\binom{9}{3} = 10\ 080\cdot 84 = 846\ 720$ esetet kapunk.

*Megjegyzés:* A végeredményt elfogadjuk $\frac{8!}{4}\cdot\binom{9}{3}$ alakban, a maximális pontszámot a tanuló akkor is megkapja, ha nem számolja ki ennek az értékét.

**2. megoldás:** A RENDETLENÜL szó 11 betűből áll, ezek között van három E betű, két N betű és két L betű. A 11 betűt 11! féle módon rendezhetjük sorba, a három E betűt, a két N betűt és a két L betűt egymás között felcserélve nem kapunk új esetet (ismétléses permutáció), ezért $\frac{11!}{3!\cdot 2\cdot 2}$ lehetőségünk van ezeknek a betűknek a sorba rendezéséhez.

Ezek között azok az esetek, amelyekben egymás mellett szerepelnek E betűk, számunkra rosszak, amelyeket le fogunk vonni. Ha két E betű szerepel egymás mellett, akkor tekintsük ezeket egy karakternek, a harmadik E betűt pedig egy szimpla jelnek.

Most 10 karaktert rendezünk sorba, köztük kettő-kettő azonos. Ilyen eset $\frac{10!}{2\cdot 2}$ van.

Ha három E betű szomszédos, akkor előbb az ilyen eseteket kétszer számoltuk, tehát ezek számát majd vissza kell adnunk.

Legyen most EEE egyetlen jel, ilyen eset $\frac{9!}{2\cdot 2}$ van.

A feladat feltételeinek megfelelő sorbarendezések száma $\frac{11!}{3!\cdot 2\cdot 2} - \frac{10!}{2\cdot 2} + \frac{9!}{2\cdot 2} = 846\ 720$.

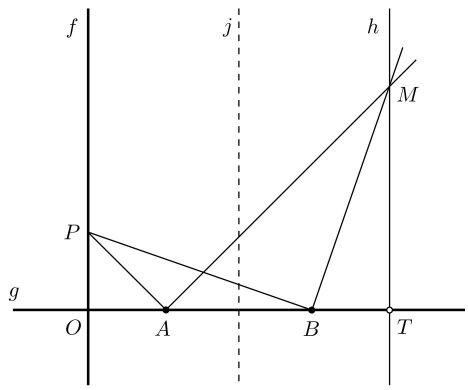
*Megjegyzés:* A végeredményt elfogadjuk $\frac{11!}{3!\cdot 2\cdot 2} - \frac{10!}{2\cdot 2} + \frac{9!}{2\cdot 2}$ alakban, a maximális pontszámot a tanuló akkor is megkapja, ha nem számolja ki ennek az értékét.

---

**3. feladat:** Adott a síkban két egymásra merőleges egyenes, $f$ és $g$, valamint a $g$ egyenesen két pont, $A$ és $B$, amelyek egymástól is és a két egyenes metszéspontjától is különböznek. Az $f$ egyenes egy tetszőleges $P$ pontját az adott pontokkal összekötő egyenesekre merőlegeseket állítunk az $A$ és $B$ pontokban. Határozza meg a merőlegesek metszéspontjainak a halmazát, ha $P$ végigfut az $f$ egyenesen.

*Kántor Sándorné (Debrecen)*

**1. megoldás:** Jelöljük $O$-val $f$ és $g$ metszéspontját. A feladat szerinti $M$ metszéspont minden olyan esetben előáll, amikor $P \neq O$, hiszen ilyenkor $PA$ és $PB$ nem párhuzamos, és így a rájuk állított merőlegesek sem azok.




Legyen $T$ az $M$ pont merőleges vetülete a $g$ egyenesen. Ekkor az $ATM$, $BTM$, $PAM$, $PBM$, $POA$ és $POB$ derékszögű háromszögekre a Pitagorasz-tételt fölírva

$$\begin{aligned} AT^2 - BT^2 &= (AM^2 - TM^2) - (BM^2 - TM^2) = AM^2 - BM^2 = \\ &= (PM^2 - PA^2) - (PM^2 - PB^2) = PB^2 - PA^2 = \\ &= (PO^2 + OB^2) - (PO^2 + OA^2) = OB^2 - OA^2 \end{aligned}$$

adódik, ami nem függ $P$ választásától.

Azt állítjuk, hogy a $T$ talppontot az $AT^2 - BT^2$ mennyiség egyértelműen meghatározza. Valóban, ha a $g$ egyenes mentén az $O$, $A$, $B$ és $T$ pontot rendre a 0, $a$, $b$ és $x$ koordináta adja meg, akkor

$$b^2 - a^2 = OB^2 - OA^2 = AT^2 - BT^2 = (x-a)^2 - (x-b)^2 = 2(b-a)x + a^2 - b^2,$$

ahonnan $a \neq b$ miatt $x$ egyértelműen kifejezhető:

$$x = \frac{2b^2 - 2a^2}{2(b-a)} = a + b.$$

Az összes $M$ metszéspont ezért a $g$ egyenesre ugyanabban a $T$ pontban állított $h$ merőleges egyenesre illeszkedik.

Ez a $T$ pont az $x = a+b$ összefüggés miatt az $O$ pontnak az $AB$ szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe.

A $h$ egyenesen tetszőlegesen kiszemelt $M \neq T$ pontból kiindulva a feladat konstrukcióját $P$ és $M$ szerepcseréjével végrehajtva visszakapjuk $P$-t. Ezért magát a $T$ pontot kivéve a $h$ egyenes minden pontja hozzátartozik a keresett halmazhoz.

**2. megoldás:** Használjuk az 1. megoldás jelöléseit. Ha $P \neq O$, akkor az $M$ pont előáll, valamint az $A$, $B$ pontok a $PM$ átmérőjű körre illeszkednek, hiszen a $PM$ szakasz $A$-ból is és $B$-ből is derékszög alatt látszik.

Az $AB$ szakasz ennek a körnek húrja, tehát az azt merőlegesen felező $j$ egyenes áthalad a kör középpontján, vagyis $PM$ felezőpontján.

Ezért $M$ rajta van az $f$ egyenes $j$-re vonatkozó tükörképén, a $h$ egyenesen.

Az $M$ pont biztosan különbözik $g$ és $h$ metszéspontjától, azaz a $T$ ponttól, hiszen a $g$ egyenesnek a körrel csak két közös pontja ($A$ és $B$) lehet.

Megfordítva, ha a $h$ egyenesen kiszemelt $M$ pont különbözik $T$-től, akkor tekintsük az $A$, $B$ és $M$ (nem kollineáris) pontokon áthaladó kört, és annak az $M$-mel átellenes $P$ pontját. Ez a $P$

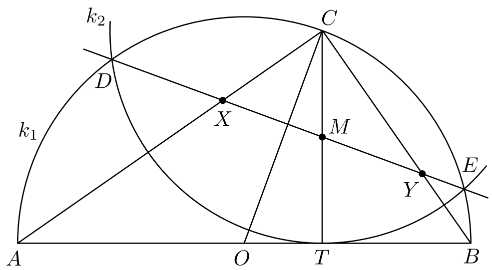
egyrészt illeszkedik $f$-re, másrészt $P$-ből kiindulva a feladat konstrukciójával $M$-et származtatja. Ezért a $T$ pont kivételével $h$ minden pontja előáll $M$-ként.

---

**4. feladat:** Legyen az $AB$ átmérőjű $k_1$ kör egy $A$-tól és $B$-től különböző pontja $C$. Bocsássunk merőlegest a $C$ pontból $AB$-re, a merőleges talppontja $T$. A $C$ középpontú, $CT$ sugarú $k_2$ kör a $k_1$ kört a $D$ és $E$ pontokban metszi. A $DE$ és $CT$ szakaszok metszéspontja $M$, a $CA$ és $DE$, valamint a $CB$ és $DE$ szakaszok metszéspontjai rendre $X$ és $Y$. Bizonyítsa be, hogy $MX = MY$.

*Bíró Bálint (Eger)*

**Megoldás:** Használjuk az ábra jelöléseit.




Az $AB$ szakasz $O$ felezőpontja a $k_1$ kör középpontja. A $CO$ szakasz a két kör középpontját köti össze, ezért merőleges a közös $DE$ húrra.

Thalész tétele miatt az $ABC$ háromszög $C$-nél derékszögű.

Az $XYC$ szög és az $OCA$ szög merőleges szárú hegyesszögek, ezért $XYC\sphericalangle = OCA\sphericalangle$. Ugyanígy $YXC\sphericalangle = OCB\sphericalangle$.

A $CAO$ háromszög egyenlő szárú, ezért $OCA\sphericalangle = CAO\sphericalangle$. Ugyanígy $OCB\sphericalangle = OBC\sphericalangle$.

A $CAB$ szög és a $BCT$ szög merőleges szárú hegyesszögek, ezért $CAB\sphericalangle = BCT\sphericalangle$. Ugyanígy $ABC\sphericalangle = TCA\sphericalangle$.

Az egyenlőségeket összevetve $MYC\sphericalangle = MCY\sphericalangle$ és $MXC\sphericalangle = MCX\sphericalangle$ következik, ami azt jelenti, hogy a $CXM$ és a $CYM$ háromszögek egyenlő szárúak. A szárak egyenlősége folytán $MX = MC = MY$.

---

**5. feladat:** Bizonyítsa be, hogy $n+1$ darab különböző, $2n$-nél kisebb pozitív egész szám közül kiválasztható három különböző úgy, hogy ezek közül kettő összege megegyezzen a harmadikkal.

*Bencze Mihály (Bukarest)*

**Megoldás:** Legyen az adott $n + 1$ szám: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$. Képezzük az $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ számokat, amelyek különbözőek, pozitívak és kisebbek, mint $2n$.

Tekintsük a következő $2n$ darab, $2n$-nél kisebb pozitív egész számot:

$$a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1.$$

A skatulyaelv szerint ezek közül kettő megegyezik.

A feltételekből következik, hogy az egyik szám az $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ számok közül való, a másik pedig az $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ számok közül.

Legyenek ezek $a_k$ és $a_m - a_1$. Ekkor $a_k = a_m - a_1$, azaz teljesül, hogy

$$a_k + a_1 = a_m.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

---

**6. feladat:** Képezzük az $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ halmaz minden nemüres részhalmazát. Az egy részhalmazban lévő számokat szorozzuk össze és vegyük a szorzat reciprokát, majd ezeket adjuk össze. (Ha a halmaz egyelemű, akkor egytényezős szorzatnak tekintjük és ennek vesszük a reciprokát.) Mekkora az így kapott összeg?

*Kántor Sándor (Debrecen)*

**1. megoldás:** Jelöljük $A_n$-nel az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz esetében az így elkészített összeget.

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} = 2,$$
$$A_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3. \tag{3}$$

Az a sejtésünk, hogy minden $n > 0$ természetes szám esetén $A_n = n$, így $A_{2016} = 2016$. Teljes indukcióval bizonyítjuk állításunkat.

A sejtés $n = 1$-re igaz. Feltételezzük, hogy $n = k$-ra is teljesül:

$$A_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = k.$$

Bizonyítjuk az állítást $n = k + 1$-re:

$$A_{k+1} = A_k + \frac{1}{k+1} + A_k \cdot \frac{1}{k+1}.$$

Felhasználjuk az indukciós feltételt:

$$A_{k+1} = k + \frac{1}{k+1} + k \cdot \frac{1}{k+1} = k + \frac{k+1}{k+1} = k + 1.$$

Ezzel sejtésünket beláttuk. Tehát a keresett összeg valóban 2016.

**2. megoldás:** Jelöljük $A_n$-nel az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz esetében az így elkészített összeget. Ez az összeg egy többtényezős szorzat zárójelfelbontás utáni alakjára emlékeztet.

Valóban, ha az alábbi szorzatban minden tagot minden taggal szorozva felbontjuk a zárójeleket, akkor az $A_n$-nél 1-gyel nagyobb számot kapunk:

$$A_n + 1 = (1+1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

A zárójeleken belül közös nevezőre hozva:

$$A_n + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} = n + 1,$$

tehát $A_n = n$.

A feladat kérdésére $A_{2016}$ a válasz, amelynek az értéke a fentiek alapján 2016.