25. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Budapest, 2016. március 11-15.

9. osztály

1. feladat: Nevezzünk egy számot prímösszegűnek, ha a tízes számrendszerben felírt szám számjegyeinek összege prímszám. Legfeljebb hány prímösszegű szám lehet öt egymást követő pozitív egész szám között?

Róka Sándor (Nyíregyháza)

1. megoldás: Az öt szám között van három olyan, amely ugyanabba a tízes blokkba tartozik.

Ez a három szám egymástól csak az utolsó számjegyben különbözik, a számjegyösszegeiket kiszámolva tehát három egymást követő számot kapunk.

Három egymást követő szám nem lehet mind prímszám, tehát az ugyanabba a tízes blokkba tartozó három szám nem lehet mind prím. Ezért az öt egymást követő egész szám között legfeljebb négy prímösszegű szám lehet.

Megmutatjuk, hogy létezik öt olyan egymást követő egész szám, amelyek között négy prímösszegű szám van. Ilyenek például: $199, 200, 201, 202, 203$, ahol a számjegyösszegek rendre $19, 2, 3, 4, 5$; vagy $197, 198, 199, 200, 201$, ahol a számjegyösszegek rendre $17, 18, 19, 2, 3$.

2. megoldás: Egy szám számjegyösszege 3-mal osztva ugyanannyi maradékot ad, mint maga a szám. Öt egymást követő szám számjegyösszegei között tehát mindig van 3-mal osztható.

Ha a 3-mal osztható számjegyösszeg nem prím, akkor legfeljebb négy prímösszegű számunk lehet. Mind az öt összeg csak úgy lehet prím, ha a 3-mal osztható számjegyösszeg a 3.

Egy n szám számjegyösszege háromféleképpen lehet 3: egy 3-as után valahány 0; egy 2-es, egy 1-es és valahány 0; vagy három 1-es és valahány 0.

Az n végződése tehát $0, 1, 2$ vagy ($n = 3$ esetén) 3.
Ezért $n + 1$ számjegyösszege mindegyik esetben 4 (hiszen nem történik tízes átlépés), vagyis nem prím. Mind az öt összeg csak úgy lehet prím, ha n az ötödik helyen álló szám.

Az ötödik helyen álló n szám nem lehet a 3, mert akkor a számok között negatív számok is lennének.
Minden más esetben n legalább kétjegyű. A hárommal osztható $n - 3$ szám végződése 7, 8 vagy 9, számjegyeinek összege nem lehet 3, ezért nem prím. (2 pont)

Megmutatjuk, hogy létezik öt olyan egymást követő egész szám, amelyek között négy prímösszegű szám van. Ilyenek például: 199, 200, 201, 202, 203, ahol a számjegyösszegek rendre 19, 2, 3, 4, 5; vagy 197, 198, 199, 200, 201, ahol a számjegyösszegek rendre 17, 18, 19, 2, 3. (2 pont)

3. megoldás: Két egymást követő szám számjegyösszege tízes átlépéskor lehet azonos paritású (pl. 9, 10 vagy 19, 20), máskor mindig különböző, mert csak az utolsó számjegy különbözik 1-gyel. Öt egymást követő szám számjegyösszegei között ezért mindig van legalább két páros.

Ez a két páros szám csak úgy lehetne egyaránt prím, ha mindegyikük 2. Egy n szám jegyeinek összege kétféleképpen lehet 2: egy 2-es után valahány 0; vagy két 1-es és valahány 0.

A szám végződése tehát $0, 1$ vagy ($n = 2$ esetén) 2.
Ha $n = 2$, akkor az $n + 2 = 4$ is a számok között van, amely nem prím.

Minden más esetben az $n+1$-től $n+4$-ig terjedő számok számjegyösszege nagyobb, mint az n számjegyösszege. Az $n-4$-től $n-1$-ig terjedő számoknak vagy 1 a számjegyösszege, vagy pedig jegyeik között van 6, 7, 8 vagy 9, egyik esetben sem lehet az összeg 2.
Nincs tehát $n-4$-től $n+4$-ig más olyan szám, amelyben a számjegyösszeg 2.
Ezért az öt egymást követő egész szám között legfeljebb négy prímösszegű szám lehet.

Megmutatjuk, hogy létezik öt olyan egymást követő egész szám, amelyek között négy prímösszegű szám van. Ilyenek például: 199, 200, 201, 202, 203, ahol a számjegyösszegek rendre 19, 2, 3, 4, 5; vagy 197, 198, 199, 200, 201, ahol a számjegyösszegek rendre 17, 18, 19, 2, 3.

---

2. feladat: Melyek azok az x egész számok, amelyekre $x^2+3x+24$ négyzetszám?

Szabó Magda (Zenta–Szabadka)

1. megoldás: Keressük az $x^2+3x+24=y^2$ egyenlet egész megoldásait. Ezt 4-gyel szorozva: $4x^2+12x+96=4y^2$.
Átrendezve:

$$(2x+3)^2+87=4y^2$$
$$(2x+3)^2-4y^2=-87.$$

Szorzattá alakítva:

$$(2x+3-2y)(2x+3+2y)=-87.$$

A 87 osztói ±1, ±3, ±29, ±87, a két tényező ezek közül kerülhet ki. Feltehetjük, hogy y pozitív, ekkor a második tényező a nagyobb. Megoldandók tehát a következő egyenletrendszerek:

$$\begin{cases} 2x+3-2y=-1 \\ 2x+3+2y=87, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3-2y=-3 \\ 2x+3+2y=29, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3-2y=-29 \\ 2x+3+2y=3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3-2y=-87 \\ 2x+3+2y=1. \end{cases}$$

Ezek megoldása rendre:

$$\begin{array}{cccc} x=20 & x=5 & x=-8 & x=-23 \\ (y=22), & (y=8), & (y=8), & (y=22). \end{array}$$

A keresett x egész számok -23, -8, 5, 20. Ezek valóban megoldásai az egyenletnek.

2. megoldás Keressük az $x^2+3x+24=y^2$ egyenlet egész megoldásait. Ezt 4-gyel szorozva: $4x^2+12x+96=4y^2$.
Átrendezve:

$$(2x+3)^2+87=4y^2$$
$$4y^2-(2x+3)^2=87.$$

Két négyzetszám különbsége 87. Tudjuk, hogy az egymást követő négyzetszámok különbségei a páratlan számok, 87 tehát valahány egymást követő páratlan szám összege.

A 87 páratlan, tehát páratlan darab páratlan számot keresünk, ezek összege osztható a tagok számával. A 87 osztói $1,3,29,87$. A tagok száma lehet 1 és lehet 3, de 29 vagy 87 nem lehet.

Egy tag esetén: $87=44^2-43^2$, ekkor $2x+3=43$, azaz $x=20$; vagy $2x+3=-43$, azaz $x=-23$.

Három tag esetén: $87 = 27+29+31 = 16^2-13^2$, ekkor $2x+3 = 13$, azaz $x = 5$; vagy $2x+3 = -13$, azaz $x = -8$.
A keresett x egész számok -23, -8, 5, 20. Ezek valóban megoldásai az egyenletnek.

3. megoldás Keressük az $x^2 + 3x + 24$ négyzetszámot $(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$ alakban. Ekkor $3x + 24 = 2kx + k^2$. Átrendezve: $x(2k - 3) = 24 - k^2$, vagyis $2k - 3 \mid k^2 - 24$.

Ekkor $2k-3 \mid 2k^2-48$ következik, és $2k-3 \mid 2k^2-3k$ is nyilván igaz. Ezekből $2k-3 \mid \mid 48-3k$, ezért $2k - 3 \mid 96 - 6k$. Ugyanakkor $2k - 3 \mid 9 - 6k$, tehát $2k - 3 \mid 96 - 9 = 87$.

A 87 osztói $+1$, -1, $+3$, -3, $+29$, -29, $+87$, -87, ezek közül kerülhet ki $2k - 3$. Ekkor k értéke rendre 2, 1, 3, 0, 16, -13, 45, -42, innen x értéke rendre 20, -23, 5, -8, -8, 5, -23, 20.
A keresett x egész számok -23, -8, 5, 20. Ezek valóban megoldásai az egyenletnek.

4. megoldás: Keressük az $x^2 + 3x + 24 = y^2$ egyenlet egész megoldásait. Átrendezve: $x^2 + 3x + (24 - y^2) = 0$. A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(24 - y^2)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4y^2 - 87}}{2}.$$

Így x csak akkor lehet egész, ha $4y^2 - 87$ négyzetszám: $4y^2 - 87 = n^2$.
Átrendezve:

$$\begin{aligned} 4y^2 - n^2 &= 87 \\ (2y - n)(2y + n) &= 87. \qquad (1) \end{aligned}$$

Feltehetjük, hogy y és n pozitív, ekkor a második tényező a nagyobb, és pozitív. A 87 pozitív osztói: $1, 3, 29, 87$. Megoldandók tehát a következő egyenletrendszerek:

$$\begin{cases} 2y - n = 1 \\ 2y + n = 87, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y - n = 3 \\ 2y + n = 29. \end{cases}$$

Ezek megoldásai rendre: $y = 22$, ekkor $x = -23$ vagy $x = 20$; illetve $y = 8$, ekkor $x = -8$ vagy $x = 5$.
A keresett x egész számok -23, -8, 5, 20. Ezek valóban megoldásai az egyenletnek.

---

3. feladat: Bizonyítsa be, hogy az

$$(n^2 + 7n)(n^2 + 7n + 6)(n^2 + 7n + 10)(n^2 + 7n + 12)$$

kifejezés minden egész n esetén osztható 2016-tal.

Nagy Piroska Mária (Dunakeszi)

Szoldatics József (Budapest)

1. megoldás: Alakítsuk szorzattá a tényezőket:

$$\begin{aligned} n^2 + 7n &= n(n + 7) \\ n^2 + 7n + 6 &= n^2 + n + 6n + 6 = (n + 1)(n + 6) \\ n^2 + 7n + 10 &= n^2 + 2n + 5n + 10 = (n + 2)(n + 5) \\ n^2 + 7n + 12 &= n^2 + 3n + 4n + 12 = (n + 3)(n + 4). \end{aligned}$$

A kérdéses kifejezés tehát $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)$ alakban írható. Ez 8 egymást követő egész szám szorzata.

Belátjuk, hogy a szorzat osztható $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016$-tal.

A 8 egymást követő szám között biztosan van 7-tel osztható, így a szorzat osztható 7-tel.

Van közöttük legalább 2 darab 3-mal osztható, így a szorzat osztható 3^2-nel.

Van 4 darab páros szám és van 4-gyel is osztható, ezzel megvan a hiányzó 2-es prímtényező, így a szorzat osztható 2^5-nel.

A kifejezés tehát osztható 2016-tal.

2. megoldás: Belátjuk, hogy a szorzat osztható $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$-tel.

Vizsgáljuk sorban a 2^5, 3^2, illetve 7 tényezőkkel való oszthatóságot.
Mivel n^2 és $7n$ azonos paritású, mind a négy tényező páros. Az n^2+7n és n^2+7n+6 különböző maradékot adnak 4-gyel osztva, egyikük tehát 4-gyel osztható, ezzel megvan a hiányzó 2-es prímtényező, így a szorzat osztható 2^5-nel.

Ha $n = 3k$ alakú, akkor n^2+7n és n^2+7n+6 egyaránt osztható 3-mal, így a szorzat osztható 3^2-nel.
Ha $n = 3k-1$ alakú, akkor n^2-nek a 3-as maradéka 1, $7n$-nek a 3-as maradéka -1. Az n^2+7n és n^2+7n+6 tehát ilyenkor is osztható 3-mal, így a szorzat osztható 3^2-nel.
Ha $n = 3k+1$ alakú, akkor $n^2+7n+10 = 9k^2+6k+1+21k+7+10 = 9k^2+27k+18 =$ $= 9(k^2+3k+2)$, ez 9-cel osztható, így a szorzat is osztható 3^2-nel.

A 7-tel való oszthatóság szempontjából elég az n^2, n^2+6, n^2+10, n^2+12 számokat vizsgálni.
Ha $n = 7k$ alakú, akkor n^2 osztható 7-tel.
Ha $n = 7k \pm 1$ alakú, akkor n^2-nek a 7-es maradéka 1, tehát n^2+6 osztható 7-tel.
Ha $n = 7k \pm 2$ alakú, akkor n^2-nek a 7-es maradéka 4, tehát n^2+10 osztható 7-tel.
Ha $n = 7k \pm 3$ alakú, akkor n^2-nek a 7-es maradéka 2, tehát n^2+12 osztható 7-tel.

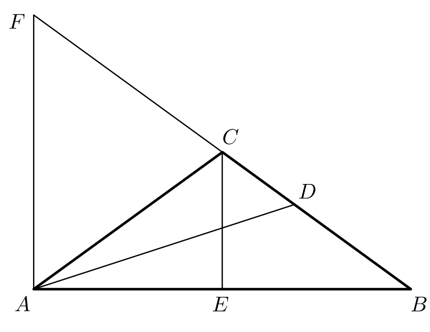
A kifejezés tehát osztható $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016$-tal.

---

4. feladat: Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögének felezője kétszer olyan hosszú, mint a szárak szögének felezője. Mekkorák a háromszög szögei?

Katz Sándor (Bonyhád)

1. megoldás: Legyen a szóban forgó ABC háromszögben $AC = BC$, valamint AD és CE a két szögfelező szakasz, a feltevés szerint $AD = 2 \cdot CE$. Legyen $\alpha = BAC\sphericalangle = CBA\sphericalangle$.



Állítsunk merőlegest az AB alapra az A pontban, jelölje F ennek metszéspontját a BC egyenessel. Mivel az E pont felezi az AB szakaszt, a párhuzamos szelők tétele miatt (vagy az EBC és ABF háromszögek hasonlósága folytán) $FA = 2 \cdot CE$.

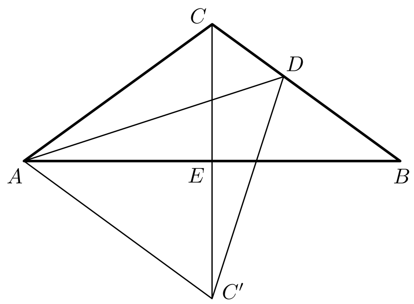
Az FAD háromszög tehát egyenlő szárú, és ezért $AFD\sphericalangle = ADF\sphericalangle$.

Ezek a szögek α-val kifejezhetők az ABF és az ABD háromszög szögösszegét felhasználva:

$$AFD\sphericalangle = 90^\circ - \alpha, \quad \text{illetve} \quad ADF\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \alpha\,.$$

Az α szögre ezekből a $90^\circ - \alpha = (3/2)\alpha$ egyenletet kapjuk, ahonnan $\alpha = 36^\circ$. A háromszög szögei tehát 36°, 36° és 108°.

2. megoldás: Használjuk az 1. megoldásban bevezetett A, B, C, D, E és α jelöléseket. Tükrözzük a háromszög C csúcsát az AB alapra, a tükörképet jelölje C'. Ekkor $AC' \parallel CB$, így az $AC'DC$ négyszög trapéz.



A feltétel szerint $AD = 2 \cdot CE = CC'$, ezért az $AC'DC$ trapéz két átlója egyenlő, vagyis szimmetrikus trapézról van szó.

Szimmetrikus trapézban az átlók egyenlő szögeket zárnak be az alapokkal, ezért $C'AD\sphericalangle = AC'C\sphericalangle$.

Ezek a szögek α-val kifejezve:

$$C'AD\sphericalangle = C'AB\sphericalangle + BAD\sphericalangle = \alpha + \frac{\alpha}{2} \quad \text{és} \quad AC'C\sphericalangle = ACC'\sphericalangle = 90^\circ - \alpha,$$

ahonnan $(3/2)\alpha = 90^\circ - \alpha$, azaz $\alpha = 36^\circ$. A háromszög szögei tehát 36°, 36° és 108°.

---

5. feladat: Adva van a síkban 2016 olyan pont, hogy mindenponthármasból kiválasztható két pont, amelyek 1 egységnél kisebb távolságra vannak egymástól. Bizonyítsa be, hogy létezik olyan egységsugarú kör, amely a 2016 pont közül legalább 1008-at tartalmaz.

Bálint Béla (Zsolna)

1. megoldás: Ha a pontok között nincs két olyan pont, amelyek távolsága legalább 1, akkor készen vagyunk, a megadott pontok közül bármelyik körül rajzolt egységsugarú kör megfelel.

Ha az A és B pontok távolsága legalább 1, akkor tekintsük az A, illetve B középpontú egységsugarú köröket.

Ha egy C pont egyik körben sincs benne, akkor az ABC ponthármas ellentmond a feladat feltételeinek.

A 2016 pontnak tehát mindegyike benne van a két kör közül legalább az egyikben. Nem lehet mindkét körben 1008-nál kevesebb pont. (Legalább) az egyik kör tehát legalább 1008 pontot tartalmaz.

Létezik tehát olyan egységsugarú kör, amely a 2016 pont közül legalább 1008-at tartalmaz.

2. megoldás: Legyen A a 2016 pont egyike. Tekintsük az A körüli egységsugarú kört. Ha ebben van legalább 1008 pont, akkor készen vagyunk.

Ha nincs, akkor legyen B és C két pont a körön kívül lévő legalább 1009 pont közül.

Mivel AB és AC nagyobb 1-nél, a feladat feltétele szerint $BC < 1$.

Ugyanígy bármely két kívül lévő pont távolsága 1-nél kisebb. A kívül lévő pontokat ezért tartalmazza például a B körüli egységsugarú kör.

Létezik tehát olyan egységsugarú kör, amely a 2016 pont közül legalább 1008-at tartalmaz.

---

6. feladat: Az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ számok mindegyikének értéke $+1$ vagy -1. Bizonyítsa be, hogy ha

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_6 + \ldots + x_{n-1}x_nx_1x_2 + x_nx_1x_2x_3 = 0,$$

akkor az n szám 4-gyel osztható.

Kekeňák Szilvia (Kassa)

Megoldás: Az összeg mindegyik tagja $+1$ vagy -1.

Nézzük meg, mi történik, ha az egyik szám, x_i előjelét megváltoztatjuk.

Az x_i szám az összeg négy tagjában szerepel, ezen tagok előjele fog megváltozni.
Ha mind a négy tag azonos előjelű, az összeg (valamelyik irányban) 8-cal változik.
Ha három tag azonos előjelű és a negyedik különböző, akkor az összeg (valamelyik irányban) $6 - 2 = 4$-gyel változik.
Ha két-két tag pozitív, illetve negatív előjelű, az összeg nem változik.

Az egyes számok előjelének megváltoztatása tehát az összeg 4-es maradékát nem befolyásolja. Ha minden szám értékét $+1$-re változtatjuk, az összeg értéke n lesz. Mivel az összeg eredetileg 0 volt, azaz 4-gyel osztható, n is osztható 4-gyel.