

23. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Csikszereda, 2014. március 12-16.

10. osztály

1. feladat: Oldd meg a prímszámok halmazán a

$$3x^2 - y^2 = 22y - 12x$$

egyenletet!

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

2. feladat: Négy Tudós Matematikus egy egyenlő szárú trapéz alakú birtokon él, házaik a trapéz csúcsaira épültek. A trapéz hosszabb alapjának hossza a , az alapon fekvő szögek nagysága 50° , az átlók által bezárt szög pedig 76° . A Tudósok szeretik a szabályos dolgokat, így elhatározták, hogy olyan kutat építenek, amely mindannyiuk házától ugyanolyan távolságra helyezkedik el. Milyen távolságra kell építeniük házaiktól a kutat? Vajon a kút a birtokukon lesz-e?

dr. Péics Hajnalka (Szabadka)

3. feladat: Oldd meg a pozitív valós számok halmazán a

$$2^{4x+1} + 2^{\frac{1}{2x^2}} = 12$$

egyenletet!

Koczinger Éva és Kovács Béla (Szatmárnémeti)

4. feladat: Adott az ABC háromszög, amelyben feltételezzük, hogy $AB < BC < AC$. A BC oldalon felvesszük a B' pontot úgy, hogy $CB' = AB$. Hasonlóan felvesszük az AC oldalon az A' és a C' pontot úgy, hogy $CA' = AB$ és $AC' = BC$. Jelöljük az AA' , BB' , illetve CC' szakaszok felezőpontját rendre D -vel, E -vel és F -fel. Bizonyítsd be, hogy ha A_1 a BC szakasz, B_1 az AC szakasz és C_1 az AB szakasz felezőpontja, valamint $\{G\} = A_1D \cap AB$, $\{H\} = B_1E \cap AB$ és $\{I\} = C_1F \cap BC$, akkor:

a) $BI = GH$;

b) az A_1D , C_1F és B_1E egyeneseknek van közös pontja;

c) ha J az ABC háromszögbe, K az $A_1B_1C_1$ háromszögbe írt kör középpontja, L pedig az ABC háromszög súlypontja, akkor a J , K és L pontok egy egyenesen helyezkednek el és $JL = 2KL$.

Pálhegyi Farkas László (Nagyvárad)

5. feladat: Bizonyítsd be, hogy az összes $\frac{1}{m \cdot n}$ alakú szám összege nem egész szám, ahol $1 \leq m < n \leq 2014$, illetve m és n természetes számok.

dr. Kántor Sándor (Debrecen)

6. feladat: a) Határozd meg a síknak egységoldalú szabályos hatszögekkel, egységoldalú négyzetekkel és egységoldalú szabályos tizenkétszögekkel való összes szabályos lefedését! Egy

lefödés azt jelenti, hogy a sokszögek hézag és átfödés nélkül (egyrétűen) lefödik a síkot. A lefödés szabályos, ha léteznek olyan a, b, c nullától különböző természetes számok, amelyekre minden keletkező csúcs körül pontosan a darab hatszög, b darab négyzet és c darab tizenkétszög van, valamilyen rögzített sorrendben.

b) Bizonyítsd be, hogy az előbbi hatszögekkel, négyzetekkel, tizenkétszögekkel, valamint egységoldalú szabályos háromszögekkel létre lehet hozni olyan, nem feltétlenül szabályos lefödést, amelyben mind a négy típusú alakzatot végtelen sokszor használjuk, és amelyben létezik végtelen sok páronként különböző mintázat, amely véges sokszor jelenik meg! (Mintázat alatt a lefödés véges sok sokszöge által meghatározott összefüggő alakzatot értünk.)

Zsombori Gabriella (Csíkszereda)

dr. András Szilárd, dr. Lukács Andor (Kolozsvár)