XXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Győr, 2013. március 14–18.

9. osztály

1. feladat: Határozza meg azokat az $m > n > g$ pozitív egész számokat, amelyekre

$$m^2 - n^2 - g^2 = 2ng + 68.$$

Oláh György (Felvidék)

Megoldás: Egyenletünket átalakítva $m^2 - (n+g)^2 = 68$, illetve: $(m+n+g)(m-n-g) = 68$ adódik. Mivel $m + n + g > m - n - g > 0$, ezért elegendő a $68 = 68 \cdot 1 = 17 \cdot 4 = 34 \cdot 2$ eseteket vizsgálni. $(m+n+g) + (m-n-g) = 2m$, így csak $m+n+g = 34$ és $m - n - g = 2$ lehetséges. Ekkor $2m = 36$, $m = 18$. Továbbá $18 + n + g = 34$ és $18 - n - g = 2$ miatt $n + g = 16$.

Ez akkor teljesül, ha

m	n	g
18	9	7
18	10	6
18	11	5
18	12	4
18	13	3
18	14	2
18	15	1

A feladat megoldását a felsorolt 7 számhármas adja, ezek ki is elégítik az eredeti feltételeket.

---

2. feladat: Kukori és Kotkoda egy tojással teli kosárral érkezett a piacra. Az első vevőjük Kopasznyakú volt, aki megvette a tojások felét és még két tojást. A második vevő Kendermagos volt, aki megvette az első vásárlásból megmaradt tojások felét és még két tojást. A harmadik vásárló, Hápogi megvette a második vásárlás után megmaradt tojások felét és még két tojást. A negyedik vásárló, Csőrike megvette a Hápogi vásárlása után megmaradt tojások felét és még két tojást. Csőrike vásárlása után Kotkoda örömmel állapította meg, hogy kiürült a kosár. Mennyi tojást vitt el Kukori és Kotkoda a kosárban a piacra?

Dr. Péics Hajnalka (Délvidék)

Megoldás: Jelölje x a kosárban levő tojások számát. Kopasznyakú vásárlása után $\frac{x}{2} - 2$ tojás maradt a kosárban.

Kendermagos vásárlása után $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right) - 2 = \frac{x}{4} - 3$ tojás maradt a kosárban.

Hápogi vásárlása után $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - 3\right) - 2 = \frac{x}{8} - \frac{7}{2}$ tojás maradt a kosárban.

Csőrike vásárlása után $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{7} - \frac{7}{2}\right) - 2 = \frac{x}{16} - \frac{15}{4}$ tojás maradt a kosárban, s mivel a kosár kiürült, így az

$$\frac{x}{16} - \frac{15}{4} = 0$$

egyenletnek kell teljesülnie, amelynek megoldása $x = 60$.

Tehát Kukori és Kotkoda 60 tojást vitt a kosárban a piacra. Valóban, a vásárlások után $60/2 - 2 = 28$, aztán 12, 4, 0 tojás maradt a kosárban.

Megjegyzés: A feladat – egyenlet nélkül – visszafelé is megoldható, sőt általánosítható.

---

3. feladat: Három kör közül mindegyik átmegy a másik kettő középpontján. Mekkora a három kör közös részének a területe?

Pintér Ferenc (Magyarország)

Megoldás: Jelölje a három kör középpontját A, B és C. A feladat feltételéből adódóan az ABC háromszög szabályos.

A keresett területet megkaphatjuk, ha az A, B és C középpontú $60°$-os körcikkek területösszegéből (ami együttesen egy félkör területe) levonjuk az ABC szabályos háromszög területének a kétszeresét.

Ha a körök sugara r, akkor a $60°$-os körcikk területe hatodrésze a kör területének, azaz $\frac{r^2\pi}{6}$, az r oldalú szabályos háromszög területe $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$, így a keresett terület:

$$3 \cdot \frac{r^2\pi}{6} - 2 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right).$$

---

4. feladat: Hányféle módon lehet a 2013-as számot olyan természetes számok összegeként előállítani, az összeadandók sorrendjétől eltekintve, amelyeknek a szorzata is 2013?

Szabó Magda (Délvidék)

Megoldás: Mivel $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ így először $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61 = 3 + 11 + 61 + 1 + \ldots + 1$, az 1-esek száma 1938, az összeadandók sorrendjétől eltekintünk, ezért ez egy eset.

A második felbontásnál $2013 = 33 \cdot 61 = 33 + 61 + 1 + \ldots + 1$, az 1-esek száma 1919, ez a második eset.

A harmadik felbontásnál $2013 = 183 \cdot 11 = 183 + 11 + 1 + \ldots + 1$, az 1-esek száma 1819, ez a harmadik eset.

A negyedik esethez $2013 = 3 \cdot 671 = 671 + 3 + 1 + \ldots + 1$, az 1-esek száma 1339.

A $2013 = 2013$ nyilvánvaló előállítást megoldásnak is tekinthetjük, ki is zárhatjuk (megállapodás kérdése). Ettől függően 4 vagy 5-féle előállítási módunk lesz. Mindkét választ elfogadjuk.

---

5. feladat: Tekintsük az

$$1 \cdot 5^0, \quad 1 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1, \quad 1 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2, \quad \ldots, \quad 1 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 + \ldots + k \cdot 5^{k-1}$$

számokat, ahol k tetszőleges pozitív egész szám és vegyük ezen számok utolsó számjegyét, majd alkossunk ezen számjegyekből egy sorozatot. Mi a sorozat 9024. tagja?

Bíró Béla (Erdély)

I. megoldás: Igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat 4-es periódusú, azaz $a_{n+4} = a_n$, tetszőleges $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ pozitív egész számra.

Egyrészt:

$1 \cdot 5^0 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

$1 + 2 \cdot 5^1 = 11 \Rightarrow a_2 = 1$

$1 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 = 86 \Rightarrow a_3 = 6$

$1 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 = 586 \Rightarrow a_4 = 6$
Másrészt, a periodikussághoz elegendő belátni, hogy az $a_{n+4} - a_n$ számok 0-ra végződnek.
Valóban:

$$a_{n+4} - a_n = (n+1)5^n + (n+2)5^{n+1} + (n+3)5^{n+2} + (n+4)5^{n+3} =$$
$$= (n+1)5^n + (n+2) \cdot 5 \cdot 5^n + (n+3) \cdot 25 \cdot 5^n + (n+4) \cdot 125 \cdot 5^n =$$
$$= (156n + 586)5^n = 2 \cdot 5^n(78n + 293),$$

ami osztható 10-el, bármely n pozitív egész szám esetén.
A $9024 = 4 \cdot (2256)$-ik szám tehát 6.

II. megoldás: Jelöljük a_n-nel az $1 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 + \ldots + n \cdot 5^{n-1}$ számot, j_n-nel az utolsó jegyét.
Ekkor $a_{n+1} - a_n = (n+1) \cdot 5^n$, ami n páratlan szám esetén egy 0-ra, míg páros esetén egy 5-re végződő szám. Tehát az utolsó jegy a sorozatban vagy megegyezik az előzővel, vagy pedig 5-tel tér el az előzőtől. Ez pedig ismétlődik rendre (hiszen a páros-páratlan számok is ismétlődnek), azaz a páratlan utáni páros indexű elemek megegyeznek, páros utáni páratlan pedig 5-tel tér el.
Mivel $j_1 = 1; j_2 = 1; j_3 = 6; j_4 = 6; j_5 = 1\ldots$ tehát az utolsó jegyek négyesével ismétlődnek.

---

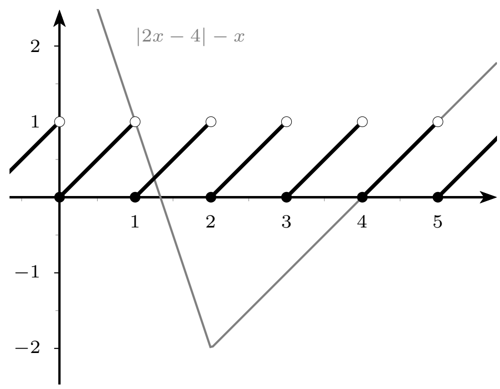
6. feladat: Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$|2x - 4| - x = \{x\}$$

($\{x\}$ jelöli az x szám törtrészét, azaz x-nek és a legnagyobb, x-nél nem nagyobb egésznek a különbségét. Pl.: $\{3{,}71\} = 3{,}71 - 3 = 0{,}71$, vagy $\{-2{,}4\} = -2{,}4 - (-3) = 0{,}6$.)

Dr. Katz Sándor (Magyarország)

Megoldás: Az $\{x\}$ grafikonja 1 meredekségű, alul zárt, felül nyílt szakaszokból áll.



$$|2x - 4| - x = \begin{cases} x - 4 & \text{ha } x \geq 2 \\ -3x + 4 & \text{ha } x < 2 \end{cases}$$

$0 \leq \{x\} < 1$, ezért vizsgáljuk, hogy a $|2x - 4| - x$ (azaz az $x - 4$ és $-3x + 4$ kifejezések) hol vesznek fel a $[0; 1[$ intervallumba eső értékeket!

Ha $x \leq 1$, vagy $x \geq 5$, akkor $|2x - 4| - x \geq 1$, és ha $4/3 < x < 4$ akkor $|2x - 4| - x < 0$, ezért az egyenlet megoldásait csak az $[1; 4/3]$ és a $[4; 5[$ intervallumokon kereshetjük .

Az $[1; 4/3]$ intervallumon az egyenletünk: $-3x + 4 = x - 1$. Ennek megoldása $x = 5/4$. Ez az adott intervallumba esik, és kielégíti az egyenletet.

A $[4;5[$ intervallumon az egyenletünk: $x-4=x-4$. Ennek megoldása minden olyan x, amely az adott intervallumba esik.

Tehát az egyenlet megoldásai $x=5/4$ és minden olyan x, amelyre $4 \leq x < 5$.