XXI. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Kecskemét, 2012. március 14–18.

9. osztály

1. feladat: A Gumimacik megszervezték a Nemzetközi Gumibogyó Szüreti Fesztivált, ahol minden résztvevő Gumimaci ugyanannyi üveg idei termésből készült gumibogyó szörpöt kapott ajándékba. Ha a Szüreti Fesztiválon tízzel kevesebb Gumimaci lett volna jelen, akkor az elkészített mennyiségből minden résztvevő két üveggel több gumibogyó szörpöt kaphatott volna. Amennyiben a Szüreti Fesztiválon nyolc Gumimacival többen vettek volna részt, akkor az idén sajtolt gumibogyó szörp mennyiségből mindannyian egy üveggel kevesebbet kaptak volna. Valójában hány Gumimaci vett részt a Nemzetközi Gumibogyó Szüreti Fesztiválon, és fejenként hány üveg gumibogyó szörpöt kapott ajándékba?

Péics Hajnalka (Szabadka)

1. feladat megoldása: Jelölje x a Nemzetközi Gumibogyó Szüreti Fesztiválon résztvevő Gumimacik számát, y pedig azoknak a gumibogyó szörppel teli üvegeknek a számát, amennyit minden Gumimaci ajándékba kapott! A feladat feltételei alapján ekkor a következő egyenletrendszert állíthatjuk fel:

$$(x-10)(y+2) = xy$$

$$(x+8)(y-1) = xy$$

$$xy + 2x - 10y - 20 = xy$$

$$xy - x + 8y - 8 = xy$$

$$x - 5y = 10$$

$$-x + 8y = 8$$

Ebből következik, hogy $x = 40$ és $y = 6$.

A Nemzetközi Gumibogyó Szüreti Fesztiválon tehát 40 Gumimaci vett részt, és fejenként 6 üveg gumibogyó szörpöt kaptak ajándékba.

---

2. feladat: Az $ABCDE$ szabályos ötszög AD és EB átlóinak metszéspontja legyen S, az AC és EB szakaszok metszéspontja P, az AD és EC átlók metszéspontja R, a DB és EC szakaszok metszéspontja pedig Q! Határozzuk meg az $APQD$ négyszög területét, ha az átlók által meghatározott $ABCDE$ csillagötszög (ötágú csillag) területe 2 egység!

Nemecskó István (Budapest)

2. feladat megoldása: A $PQDR$ négyszög paralelogramma, tehát átlója felezi a területét:

$$T_{PQD} = \frac{T_{PQDR}}{2} = T_{QDR}.$$

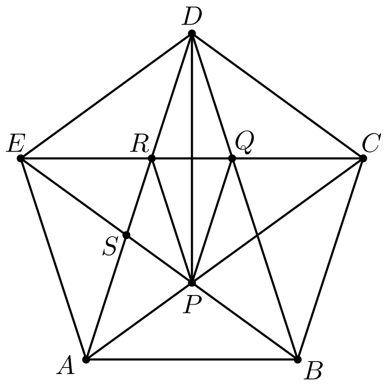
Az RES háromszög egybevágó a QDR háromszöggel, tehát területük egyenlő:

$$T_{QDR} = T_{RES}.$$

A keresett terület:

$$T_{APQD} = T_{APQD} - T_{PQD} + T_{RES}.$$

Az ábráról látszik, hogy ez a csillagötszög (ötágú csillag) fele, tehát a keresett terület 1 egység.



---

3. feladat: Az asztalon egy egyenes mentén 50 zsetont helyeztek el. Aladár és Bea a következő játékot játssza: felváltva vesznek el a zsetonok közül alkalmanként 3-3 darabot addig, amíg 2 zseton nem marad. Ha ezek nem szomszédosak, akkor a kezdő játékos győz, ha pedig szomszédosak, akkor a második játékos a győztes. Kinek van nyerő stratégiája, ha a játékot Bea kezdi?

Szabó Magda (Szabadka)

3. feladat megoldása: Aladárnak van nyerő stratégiája. Ez a következő:
Valamelyik irányból megszámozza és párba állítja a zsetonokat, az $(1;2)$, $(3;4)$, $\dots$, $(49;50)$ párokba, majd Bea választása után ő az alábbiak szerint kontrázik:

– ha Bea választ 3 zsetont 3 különböző párból, akkor kiveszi mindhárom kiválasztott párból a másodikat;

– ha Bea egy pár két zsetonját és egy tetszőleges harmadikat választ, akkor Aladár a harmadik zseton párját és egy tetszőleges pár két zsetonját veszi el.

Mivel $50 = 6 \cdot 8 + 2$, ezért a nyolcadik lépés után két szomszédos zseton marad.
Általában is igaz, hogy a másodikként elvevő játékosnak van nyerő stratégiája, ha a zsetonok száma $6k + 2$.

---

4. feladat: Határozzuk meg azokat a pozitív egész n számokat, amelyekre a $2^n - 1$ és a $2^n + 1$ számok közül legalább az egyik osztható 7-tel!

Kántor Sándor (Debrecen)

4. feladat megoldása: Keressük a megfelelő n-eket a 3-as maradékaik szerint megkülönböztetve, azaz $n = 3k + r$ alakban, ahol $r \in \{0; 1; 2\}$!

$2^n - 1 = 2^r \cdot \left(8^k - 1\right) + 2^r - 1$. Mivel $8^k - 1$ osztható 7-tel, ezért $2^n - 1$ 7-es maradéka egyenlő $2^r - 1$ 7-es maradékával, ami lehet 0, 1 vagy 3. $2^n - 1$ tehát pontosan akkor osztható 7-tel, ha n osztható 3-mal.

$2^n + 1 = 2^r \cdot \left(8^k - 1\right) + 2^r + 1$. Mivel $8^k - 1$ osztható 7-tel, ezért $2^n + 1$ 7-es maradéka egyenlő $2^r + 1$ 7-es maradékával, ami lehet 2, 3 vagy 5. $2^n + 1$ tehát egyetlen pozitív egész n esetén sem osztható 7-tel.

Kaptuk, hogy a $2^n - 1$ és $2^n + 1$ számok közül legalább az egyik (ez mindig a $2^n - 1$) pontosan a 3-mal osztható pozitív egész n-ek esetén osztható 7-tel.

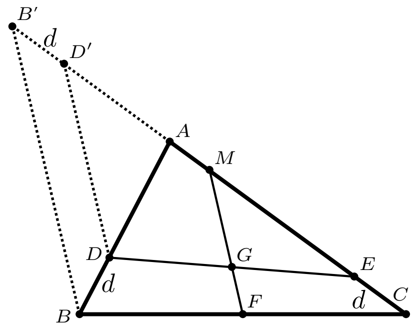
---

5. feladat: Az ABC háromszög AB és AC oldalainak belsejében úgy vesszük fel rendre a D és E pontokat, hogy $BD = CE$ teljesüljön. Legyen F és G rendre a BC és DE szakaszok felezőpontja, valamint legyen M az FG egyenesnek az AC oldallal vett metszéspontja! Határozzuk meg az AM szakasz hosszát az AB és AC oldalak hosszának függvényében!

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

5. feladat I. megoldása: A feladat lényegén nem változtat, ha feltételezzük, hogy $AB < AC$.

Az AC oldal A-n túli meghosszabbításán felvesszük a B' és D' pontokat úgy, hogy $AB' = AB$ és $AD' = AD$ teljesüljön. Könnyen látható, hogy $B'D' = BD = CE = d$ és BB' párhuzamos DD'-vel.



Ha M' az ED' szakasz felezőpontja, akkor M' a CB' szakasz felezőpontja is.

Az EDD' háromszögben GM' középvonal, tehát GM' párhuzamos DD'-vel.

A CBB' háromszögben FM' középvonal, tehát FM' párhuzamos BB'-vel.

Mivel GM' párhuzamos DD'-vel, FM' párhuzamos BB'-vel és BB' párhuzamos DD'-vel, ezért F, G, M' egy egyenesen elhelyezkedő pontok, tehát M' egybeesik az M ponttal.

$$ME = MD' = MA + AD' = AM + AD = AM + AB - BD = AM + AB - d$$

és

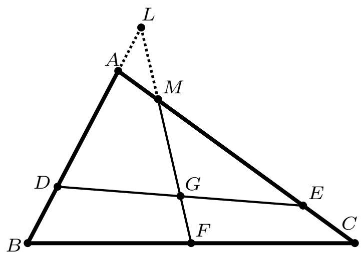
$$AC = AM + ME + EC = AM + (AM + AB - d) + d,$$

ahonnan $AC = 2AM + AB$ és $AM = \frac{AC-AB}{2}$. Tehát $AM = \frac{|AB-AC|}{2}$.

5. feladat II. megoldása: A feladat lényegén nem változtat, ha feltételezzük, hogy $AB < AC$.

Legyen L az FG egyenes és az AB egyenes metszéspontja.

Az ABC és ADE háromszögekben alkalmazzuk Menelaosz tételét az FG szelőre nézve:



$$\frac{LB}{LA} \cdot \frac{MA}{MC} \cdot \frac{FC}{FB} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{LD}{LA} \cdot \frac{MA}{ME} \cdot \frac{GE}{GD} = 1.$$

Figyelembe véve az $FB = FC$ és $GD = GE$ egyenlőségeket, kapjuk, hogy

$$\frac{LB}{LA} \cdot \frac{MA}{MC} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{LD}{LA} \cdot \frac{MA}{ME} = 1. \qquad (*)$$

$(*)$-ból következik, hogy $\frac{LB}{LA} = \frac{MC}{MA}$ és $\frac{LD}{LA} = \frac{ME}{MA}$, ahonnan az aránypárok megfelelő oldalait egymásból kivonva kapjuk, hogy $\frac{LB-LD}{LA} = \frac{MC-ME}{MA}$, vagyis $\frac{BD}{LA} = \frac{CE}{MA}$. Mivel $BD = CE$, ezért $LA = MA$.

A $(*)$ egyenlőségek bal oldalainak egyenlőségéből következik $\frac{LB}{MC} = \frac{LD}{ME}$, vagyis $\frac{LB}{LD} = \frac{MC}{ME}$, amelyből származtatjuk az $\frac{LB}{LB-LD} = \frac{MC}{MC-ME} \Leftrightarrow \frac{LB}{BD} = \frac{MC}{CE}$ aránypárt.

Mivel $BD = CE$, ezért $LB = MC$, amely felírható $LA + AB = AC - AM$ alakban. Figyelembe véve az $LA = MA$ egyenlőséget, kapjuk, hogy $AM = \frac{AC-AB}{2}$. Tehát $AM = \frac{|AB-AC|}{2}$.

---

6. feladat: Egy valós számokból álló $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ véges sorozat tagjaira teljesül, hogy bármely 5 egymást követő tagjának összege negatív, és bármely 8 egymást követő tagjának összege pozitív. Legfeljebb hány tagja lehet egy ilyen sorozatnak?

Kallós Béla (Nyíregyháza)

6. feladat megoldása: Megmutatjuk, hogy 12 tagja már nem lehet a sorozatnak. Vizsgáljuk meg a következő táblázatot:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}

A feladat egyik feltétele miatt minden oszlop összege negatív, azaz a táblázatban szereplő összes szám összege negatív.

A másik feltétel miatt azonban minden sor összege pozitív, azaz az összes szám összege pozitív.

Ez az ellentmondás azt jelenti, hogy 12 tagja nem lehet a sorozatnak. 11 tagja viszont már lehet a sorozatnak, amint ezt a következő példa is mutatja:

$$5; -8; 5; 5; -8; 5; -8; 5; 5; -8; 5.$$