XX. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Bonyhád, 2011. március 11–15.

9. osztály

1. feladat: ,,Fanyűvő és én együtt 20 nap alatt vágnánk ki a Nagy Kerek Erdőt" – mondja Törzsök Jankó. ,,Bár ha Erdődöntögetővel dolgoznék, akkor ezt a munkát öt nappal előbb befejeznénk." ,,Nekem jobb ötletem van" – mondja Erdődöntögető. ,,Ha én dolgoznék együtt Fanyűvővel, akkor mi ketten egy ötödével kevesebb idő alatt végeznénk a munkával, mint ha Törzsök Jankóval dolgoznék." Mennyi idő alatt vágnák ki a Nagy Kerek Erdőt külön-külön ezek az erős emberek, és mennyi idő alatt végeznének a munkával, ha mindhárman együtt dolgoznának?

Peics Hajnalka (Szabadka)

Megoldás: Jelölje x, y illetve z, ugyanebben a sorrendben azon napoknak a számát, amelyek alatt Fanyűvő, Törzsök Jankó illetve Erdődöngető kivágná a Nagy Kerek Erdőt. Ha az elvégzendő munkát 1-gyel jelöljük, akkor Fanyűvő, Törzsök Jankó illetve Erdődöngető a munka $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ illetve $\frac{1}{z}$ részét végezné el egy nap alatt. A feladat feltételei alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{1}{15} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}&=\frac{1}{12} \end{aligned}\right\}$$

A fenti háromismeretlenes egyenletrendszert kell megoldani.

Összeadva a három egyenletet, némi rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}.$$

Ez azt jelenti, hogy mindhárman együtt dolgozva egy nap alatt a munka $\frac{1}{10}$ részét végeznék el, a teljes munkát pedig 10 nap alatt.

Ebből adódik, hogy

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{1}{30},$$

vagyis $x=30$.

Hasonló módon kapjuk, hogy $y=60$, $z=20$.

Tehát a Nagy Kerek Erdőt Fanyűvő 30 nap alatt, Törzsök Jankó 60 nap alatt, Erdődöngető pedig 20 nap alatt vágná ki.

---

2. feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra a $(2n+1)^2+(2n+2)^2+(2n+3)^2$ kifejezés felírható 4 különböző pozitív egész szám négyzetösszegeként.

Bencze Mihály (Brassó)

Megoldás: Jelöljük (az egyszerűség kedvéért) a középső számot $2n+2=2a$-val ($n=a-1$). Így a következőt kellene belátni:

$$(2a-1)^2+(2a)^2+(2a+1)^2$$

felbontható 4 különböző négyzetszám összegére.

Elvégezve a kijelölt műveleteket és csoportosítva:

$$\begin{aligned}(2a-1)^2+(2a)^2+(2a+1)^2&=4a^2-4a+1+4a^2+4a^2+4a+1=\\&=12a^2+2=a^2-2a+1+a^2+a^2+2a+1+9a^2=(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(3a)^2\end{aligned}$$

Mivel $a-1<a<a+1$, ezért ezek különbözők, ha

$$a-1\neq 3a \text{ és } a\neq 3a \text{ és } a+1\neq 3a$$

Ezek teljesülnek, hiszen a pozitív egész szám. Visszatérve n-re:

$$(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(3a)^2=n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(3n+3)^2$$

a keresett felbontás.

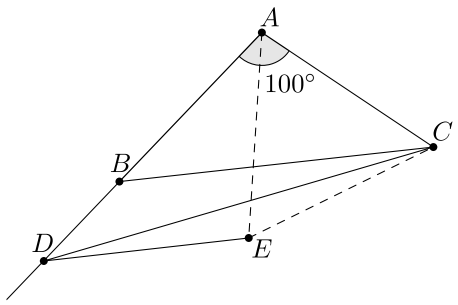
---

3. feladat: Az ABC egyenlő szárú háromszögben $A\sphericalangle=100°$. Vegyük fel az AB szár B-n túli meghosszabbításán a D pontot úgy, hogy $AD=BC$ legyen. Mekkorák a BCD háromszög szögei?

Katz Sándor (Bonyhád)

Megoldás: $ABC\sphericalangle=40° \Rightarrow DBC\sphericalangle=140°$ (kiegészítő szögek).

$AD=BC$, ezért vegyük fel az eredetivel egybevágó ADE háromszöget! $DAE\sphericalangle=40°$ (az



A 3. feladathoz.

egybevágóság miatt) $\Rightarrow EAC\sphericalangle=100°-40°=60°$.

$AE=AC$ (az egybevágóság miatt) $\Rightarrow$ az AEC háromszög szabályos (egyenlő szárú és egyik szöge 60°), $AEC\sphericalangle=ACE\sphericalangle=60°$.

$DEC\sphericalangle=100°+60°=160°$.

$DE=ED \Rightarrow EDC\sphericalangle=ECD\sphericalangle=10°$.

$DCB\sphericalangle=ACE\sphericalangle-ECD\sphericalangle-ACB\sphericalangle=60°-10°-40°=10°$.

$BDC\sphericalangle=180°-DBC\sphericalangle-BCD\sphericalangle=180°-140°-10°=30°$.

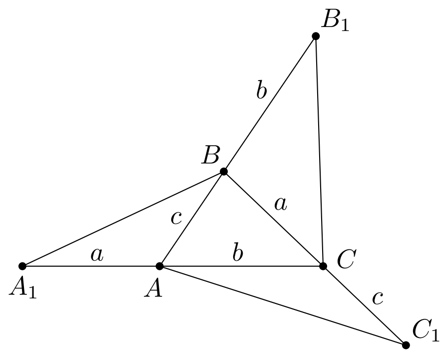
Tehát a háromszög szögei 140°, 30° és 10°.

---

4. feladat: Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalait meghosszabbítjuk a B, C és A pontokon túl a BB_1, CC_1, AA_1 szakaszokkal úgy, hogy $BB_1 = AC$, $CC_1 = AB$, $AA_1 = BC$ legyen. Jelölje továbbá az ABC, AA_1B, BB_1C, CC_1A háromszögek területét T_{ABC}, T_{AA_1B}, T_{BB_1C}, T_{CC_1A}. Mutassuk meg, hogy $T_{AA_1B} + T_{BB_1C} + T_{CC_1A} \geq 3T_{ABC}$.

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

Megoldás: Vezessük be a háromszög oldalaira a szokásos jelöléseket:



A 4. feladathoz.

Ismert (könnyen belátható), hogy

$$\frac{T_{AA_1B}}{T_{ABC}} = \frac{a}{b}, \quad \frac{T_{BB_1C}}{T_{ABC}} = \frac{b}{c}, \quad \frac{T_{CC_1A}}{T_{ABC}} = \frac{c}{a}$$

A három egyenletet összeszorozva a következőt kapjuk:

$$\frac{T_{AA_1B} \cdot T_{BB_1C} \cdot T_{CC_1A}}{T_{ABC}^3} = 1, \text{ azaz}$$

$$T_{AA_1B} \cdot T_{BB_1C} \cdot T_{CC_1A} = T_{ABC}^3.$$

Utóbbi összefüggés lehetőséget ad a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alkalmazására.

$$T_{ABC} = \sqrt[3]{T_{AA_1B} \cdot T_{BB_1C} \cdot T_{CC_1A}} \leq \frac{T_{AA_1B} + T_{BB_1C} + T_{CC_1A}}{3}, \text{ azaz}$$

$$3T_{ABC} \leq T_{AA_1B} + T_{BB_1C} + T_{CC_1A}.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

---

5. feladat: Legfeljebb hány oldalú az a konvex sokszög, amely feldarabolható olyan derékszögű háromszögekre, amelyek hegyesszögei 30 és 60 fokosak? (A feldarabolás során csak ilyen háromszög keletkezhet, másféle sokszög nem).

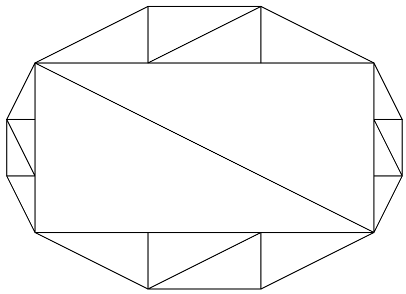
Kiss Sándor (Nyíregyháza)

Megoldás: Tegyük fel, hogy egy konvex sokszög feldarabolható a kívánt módon.

Mivel a felosztásban szereplő háromszögek minden szöge 30° egész számú többszöröse, ugyanez igaz a sokszög minden egyes szögére, vagyis azok legfeljebb 150°-os szögek lehetnek.

Ennek megfelelően a sokszög minden külső szöge legalább 30°-os.

Mivel ezek összege 360°, a sokszögnek legfeljebb 12 oldala lehet.



Az 5. feladathoz.

Az ábrán egy megfelelő 12 oldalú sokszöget láthatunk. Ez úgy keletkezett, hogy először két megfelelő egybevágó háromszöget egy téglalappá illesztettünk össze. Ezután a hosszabbik oldalak fölé harmad ekkora háromszögekből összerakott szimmetrikus trapézokat illesztettünk, és hasonlóképpen jártunk el a rövidebb oldalakat illetően is.

---

6. feladat: A 957 háromjegyű szám mögé írjunk három számjegyet úgy, hogy a kapott hatjegyű szám osztható legyen 9-cel, 5-tel és 7-tel is! Melyek ezek a háromjegyű számok?

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

Megoldás: Mivel az 5, 7 és 9 páronként relatív prímek, ezért a keresett hatjegyű számnak oszthatónak kell lenni $9 \cdot 7 \cdot 5 = 315$-tel.

Másrészt $957000 = 3038 \cdot 315 + 30$, ezért a keresett számok $957\overline{abc} = 3038 \cdot 315 + 30 + \overline{abc}$ alakúak, ahonnan $30 + \overline{abc}$ lehetséges értékei 315, $2 \cdot 315 = 630$ vagy $3 \cdot 315 = 945$ lehetnek, így $\overline{abc}$ vagy 285, vagy 600, vagy 915.